

TEKNISKA HÖGSKOLAN

Avdelningen för elektro- och telekommunikationsteknik

Henrik Wallén

Finite elementmetoden för analys av planara antenner

Diplomarbete som inlämnats för granskning som lärdomsprov för avläggande
av diplomingenjörsexamen

Esbo 3.10.2000

Arbetets övervakare


Professor Keijo Nikoskinen

~~TKK Sähkö- ja
tietoliikennetekniikan kirjasto
Oskari S. A.
00150 ESPOO
30-10-2000~~

Utfört av:	Henrik Wallén		
Arbetets namn:	Finita elementmetoden för analys av planara antenner		
Datum:	3.10.2000	Sidantal:	83
Avdelning:	Avdelningen för elektro- och telekommunikation		
Professur:	Elektromagnetik	Kod:	S-96
Övervakare:	Professor Keijo Nikoskinen		
Handledare:	Professor Keijo Nikoskinen		
Sammandrag:			
<p>I detta diplomarbete tillämpas finita elementmetoden (FEM) på planara antenner i ett försök att utvärdera hur väl metoden ifråga lämpar sig för analys av dessa antenner.</p> <p>Teoridelen av detta arbete innehåller en översikt av metoden och dess tillämpning på antennproblem. Formuleringen av problemet, begränsningen av problemområdet samt valet av element och basfunktioner behandlas mer omfattande och olika alternativa lösningar presenteras. Vidare behandlas också diskretiseringen, antennenmatningen, lösningen av det linjära ekvationssystemet med konjugat gradientmetoden och fjärrfältets beräkning med hjälp av Huyghens princip.</p> <p>Som en del av detta diplomarbete har ett FEM-program utvecklats. Med hjälp av detta program har två olika mikrostripantenner analyserats och olika parametrars inverkan på resultaten har kvalitativt utvärderats.</p>			
Nyckelord:	finita elementmetoden, planara antenner		

Author:	Henrik Wallén		
Name of the Thesis:	Finite element method for planar antenna analysis		
Date:	3.10.2000	Pages:	83
Department:	Department of Electrical and Communications Engineering		
Professorship:	Electromagnetics	Code:	S-96
Supervisor:	Professor Keijo Nikoskinen		
Instructor:	Professor Keijo Nikoskinen		
Abstract:	<p>In this Master's Thesis the Finite Element Method (FEM) is applied to planar antennas in an attempt to evaluate how well the method is suited for analyzing these antennas.</p> <p>The theory part of this thesis contains an overview of the method and its application to antenna problems. The formulation of the problem, the truncation of the problem domain and the choice of elements and basis functions are extensively treated and different alternatives are presented. Furthermore the meshing, the antenna feed, the solution of the linear equation system using the conjugate gradient method and the computation of the far field using Huyghen's principle are treated.</p> <p>As a part of this thesis, a FEM-program has been developed. Using this program two microstrip antennas has been analyzed and the influence of different parameters is qualitatively evaluated.</p>		
Keywords:	finite element method, planar antennas		

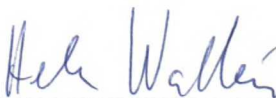
Förord

Detta diplomarbete är gjort i Laboratoriet för elektromagnetik vid Tekniska högskolan under perioden januari–september 2000.

Det har varit mycket intressant att delta i laboratoriets verksamhet, och mitt varma tack riktar sig framför allt till professor Keijo Nikoskinen för det intressanta ämnet, handledningen och många goda råd. Även resten av laboratoriets personal förtjänar ett stort tack för den vänliga inställningen och den trevliga informella atmosfär som varit rådande i laboratoriet.

HFSS-simuleringarna som presenteras i sektion 13.2 har jag haft möjlighet att utföra hos VTT Informationsteknik. Tack till VTT för denna möjlighet, och i synnerhet till Arto Hujanen för goda råd angående användningen av HFSS-programmet.

Esbo 3.10.2000



Henrik Wallén

Innehåll

1 Inledning	1
2 Finita elementmetoden – introduktion	2
3 Antennproblem	5
4 Begränsning av problemområdet	8
4.1 Hybrida metoder	8
4.2 Absorberande randvillkor	9
4.3 Isotropiska absorberande material	11
4.4 Anisotropiska absorberande material	13
4.5 Vald lösning	15
5 Element och basfunktioner	16
5.1 Nodbaserade element	16
5.2 Kantelement	20
5.3 Rätta triangulära prismor som kantelement	22
6 Diskretisering av problemområdet	25
6.1 Krav på nätgenereringen	25
6.2 Vald lösning	26
7 Antennmatning	27
8 Formulering av ekvationssystemet	28
9 Lösning av ekvationssystemet	31
9.1 Glesa matriser och iterativa metoder	31
9.2 Konjugat gradient-metoden	32
10 Fjärrfält och strålningsdiagram	35
11 Impedans	40
12 Applikation	41
13 Referensdata	43
13.1 Approximativa formler	43
13.2 HFSS-simuleringar	45
13.3 LM_BRICK-simuleringar	48

14 Resultat för den kvadratiska mikrostripantennen	50
14.1 Olika nät	51
14.2 Det absorberande materialets inverkan	54
14.3 Lokalt tätare nät	56
14.4 Fält och ytströmmar	59
14.5 Jämförelse av resultaten	63
15 Resultat för den runda mikrostripantennen	65
15.1 Olika nät	66
15.2 Det absorberande materialets inverkan	69
15.3 Lokalt tätare nät	71
15.4 Fält och ytströmmar	73
15.5 Jämförelse av resultaten	76
16 Slutsatser	78
Referenser	79

Beteckningar och symboler

\mathbf{a}	vektor
$\overline{\overline{a}}$	dyad
\mathcal{L}	linjär operator
(f, g)	(symmetrisk)innerprodukt
$[A], A_{ij}$	$N \times N$ -matris, elementet på rad i och kolumn j
$\{a\}, a_i$	$N \times 1$ -kolumnvektor, elementet på rad i
j	imaginärenheten $\sqrt{-1}$
$\Re\{a\}, \Im\{a\}$	realdel, imaginärdel
\mathbf{E}, \mathbf{H}	elektrisk respektive magnetisk fältstyrka
\mathbf{D}, \mathbf{B}	elektrisk respektive magnetisk flödestäthet
\mathbf{J}, \mathbf{J}_m	elektrisk respektive magnetisk strömtäthet
$\mathbf{J}_s, \mathbf{J}_{ms}$	elektrisk respektive magnetisk ytströmtäthet
c_0	ljusets hastighet i vakuum
ϵ_0, ϵ_r	permittiviteten i vakuum, relativ permittivitet
μ_0, μ_r	permeabiliteten i vakuum, relativ permeabilitet
σ, σ_m	elektrisk respektive magnetisk ledningsförmåga
$\tan \delta, \tan \delta_m$	elektrisk respektive magnetisk förlusttangens
ω	vinkelfrekvens $\omega = 2\pi f$
λ	våglängd
k, k_0	vågtalet, vågtalet i vakuum
η_0	vågimpedansen i vakuum
\mathbf{r}	ortsvektor
$\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_z$	olika enhetsvektorer
h_i, d_i	höjd, längd
α_i	vinkel
ξ, η	lokala kartesiska koordinater för en triangel
L_1, L_2, L_3	areakoordinater för en triangel
N_i^e, \mathbf{W}_i^e	skalära respektive vektorvärda basfunktioner
R	reflektionskoefficient
f_0	resonansfrekvens
Z_{in}, R_{in}, X_{in}	antennimpedans, dess real- och imaginärdel
G	antennvinst

Där överindexet e förekommer betecknar det elementnummer. Samtidigt innebär det att eventuella underindex i, j är elementspecifika istället för globala. T.ex. E_i^e betecknar elfältskomponent i för element e medan E_i är elfältskomponenten med det globala indexet i .

1 Inledning

Behovet av billiga små integrerbara antenner växer allt mer i och med den explosionsartade utvecklingen inom dagens mobila telekommunikation och olika former av trådlös dataöverföring. Dessutom krävs ofta att en antenn skall fungera på två eller till och med flera frekvensband. I det här sammanhanget är olika typer av planara antenner en ofta använd lösning.

Ett betydande problem med planara antenner är dock att de är svåra att analysera, och utvecklingen av dessa kan innefatta många prototyper och omfattande mätningar. Några exakta analytiska lösningar finns inte att tillgå, ens för en geometriskt enkel rektangulär mikrostripantenn. Approximativa analytiska formler finns, men endast för vissa enkla geometrier, och precisionen är inte nödvändigtvis tillfredsställande. Någon numerisk lösningsmetod kunde alltså vara att föredra.

Det finns flera olika numeriska metoder som kunde tänkas vara lämpliga för detta problem. Finita differenser i tidsdomän är ett alternativ, men med den metoden är det svårt att analysera många geometriskt invecklade strukturer. Momentmetoden är ett annat alternativ, men också i det fallet är det inte speciellt enkelt att analysera godtyckliga geometrier – i synnerhet med inhomogena material. Med finita elementmetoden är de geometriska begränsningarna betydligt mindre och även inhomogena material kan ingå.

Målet med detta diplomarbete är att undersöka hur finita elementmetoden lämpar sig för analys av planara antenner. De antennparametrar som främst intresserar är resonansfrekvensen, antennimpedansen och antennens strålningsdiagram.

Ungefär hälften av detta diplomarbete innehåller den nödvändiga teorin för att tillämpa finita elementmetoden på denna typ av antennproblem. Den andra hälften presenterar och jämför de resultat jag fått med det program jag själv utvecklat och med två andra program. Teoridelen är till stor del användbar också för andra liknande problem och en del olika alternativa lösningar nämns också. Det utvecklade programmet är däremot ganska begränsat till sina egenskaper för att hålla arbetsinsatsen på en rimlig nivå.

2 Finita elementmetoden – introduktion

Finita elementmetoden är en numerisk metod för lösning av randvärdesproblem: integral- eller differentialekvationer med tillhörande randvillkor. Metoden anses uppfunnen redan på 1940-talet och de första tillämpningarna kom på 1950-talet. Metoden har sedan dess aktivt använts i synnerhet inom hållfasthetsläran. De första elektromagnetiska tillämpningarna kom betydligt senare, omkring år 1968–1969, och behandlade lösningen av homogena vågledare. Senare har metoden utvecklats och tillämpats på en mängd elektromagnetiska problem, däribland tredimensionella spridnings- och antennproblem. [1, 2, 3]

De största fördelarna med finita elementmetoden är möjligheten att behandla godtyckliga geometrier och inhomogena material. Vidare är matris-ekvationen som uppstår gles och den går effektivt att lösa med iterativa metoder. Minneskraven är typiskt $O(N)$, dvs. direkt proportionella mot antalet okända, medan olika randintegralsformuleringar normalt har $O(N^2)$ minneskrav och $O(N^3)$ tidskomplexitet. Trots att antalet okända N i allmänhet är avsevärt större med finita elementmetoden anses den effektivare förutsatt att problemet innehåller annat än metallkonstruktioner. [2]

Finita elementmetoden grundar sig på att det ursprungliga problemområdet indelas i ett ändligt antal delområden eller element som täcker hela det ursprungliga området utan överlappningar. I varje element representeras den sökta funktionen av basfunktioner med ett ändligt antal okända koefficienter. Genom att applicera Galerkins eller Ritz' metod får man ett algebraiskt ekvationssystem vars lösning ger de okända koefficienterna. [1, 2]

Problemet som skall lösas kan generellt formuleras som en operatorekvation

$$\mathcal{L}\phi = f \quad (1)$$

med tillhörande randvillkor

$$\mathcal{B}\phi = g, \quad (2)$$

där ϕ är den sökta funktionen, \mathcal{L} och \mathcal{B} är linjära operatorer medan f och g är kända funktioner. Problemet är definierat i ett ändligt område Ω i 1, 2 eller 3 dimensioner. Randvillkoren är definierade på områdets gräns Γ .

För att lösa detta problem med finita elementmetoden uppdelas området Ω i M element, så att den sökta funktionen ϕ approximeras med

$$\phi \approx \sum_{e=1}^M \phi^e. \quad (3)$$

Funktionerna ϕ^e är olika noll bara i respektive element där de kan uttryckas med hjälp av basfunktionerna N_i^e och n koefficienter som

$$\phi^e = \sum_{i=1}^n N_i^e \phi_i^e. \quad (4)$$

Istället för en okänd funktion ϕ har vi således för varje element n okända koefficienter. Formuleringen av ett ekvationssystem för dessa koefficienter kan göras på två sätt som i regel ger samma slutresultat: antingen med Ritz' metod eller Galerkins metod. Vardera formuleringen beskrivs detaljerat i boken [1].

För att formulera problemet med Ritz' metod, eller Rayleigh-Ritz' metod som den också kallas, behöver vi en funktional $F(\phi)$ vars stationära punkt motsvarar lösningen av ekvation (1). Olika sätt att konstruera en lämplig funktional finns beskrivna i boken [1], och ett antal funktionaler, varav en del inklusive härledning, för olika elektromagnetiska problem finns att tillgå t.ex. i böckerna [1, 2].

Om vi för enkelhetens skull antar att operatoren \mathcal{L} är självadjungerad

$$(\mathcal{L}\phi, \psi) = (\phi, \mathcal{L}\psi), \quad (5)$$

med en symmetrisk innerprodukt

$$(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \phi \psi \, d\Omega, \quad (6)$$

och vidare att randvillkoren är homogena ($g = 0$), blir funktionalen

$$F(\phi) = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\phi, \phi) - (\phi, f). \quad (7)$$

För att få ett ekvationssystem för de okända koefficienterna använder vi funktionalen på ett enskilt element

$$F^e = F(\phi^e), \quad (8)$$

och söker dess stationära punkt med Ritz' metod

$$\frac{\partial F^e}{\partial \phi_i^e} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Genom att substituera (7) och (4) och derivera får vi ett ekvationssystem med n okända och n ekvationer

$$[K^e] \{\phi^e\} = \{b^e\}, \quad (10)$$

där $[K^e]$ är en känd $n \times n$ matris, $\{b^e\}$ en känd $n \times 1$ kolumnvektor och $\{\phi^e\}$ en $n \times 1$ kolumnvektor med de sökta koefficienterna.

Genom att kombinera alla M elementekvationer (10) får vi ett ekvations-system med N ekvationer och N okända

$$[K] \{\phi\} = \{b\}, \quad (11)$$

där dimensionen $N < Mn$ eftersom elementekvationerna är kopplade genom att koefficienterna ϕ_i^e är gemensamma med närliggande element.

Innan ekvationssystemet (11) löses måste man ännu se till att randvillkoren (2) uppfylls. Homogena randvillkor av Neumann-typ är i det här fallet automatiskt uppfyllda, men randvillkor av Dirichlet-typ måste behandlas skilt. Detta innebär i praktiken att en del av koefficienterna ϕ_i är kända och kan elimineras ur ekvationssystemet. Ifall Dirichlet-randvillkoren är inhomogena måste $\{b\}$ samtidigt modifieras.

3 Antennproblem

Ett generellt antennproblem kan formuleras som lösningen av Maxwells ekvationer med randvillkor som bestäms av geometrin i fråga. Ifall el- och magnetfälten är tidsharmoniska, dvs. att tidsberoendet är

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \} \quad (12)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{j\omega t} \}, \quad (13)$$

kan ekvationerna uttryckas som

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{J}_m - j\omega\mu_0\mu_r\mathbf{H} \quad (14)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega\epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}, \quad (15)$$

där den relativa permittiviteten ϵ_r och den relativa permeabiliteten μ_r i allmänhet inte är konstanta.

Ledningsförluster innefattas i ϵ_r och μ_r genom att göra dem komplexa

$$\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon'(1 - j \tan \delta) = \epsilon' - j \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} \quad (16)$$

$$\mu_r = \mu' - j\mu'' = \mu'(1 - j \tan \delta_m) = \mu' - j \frac{\sigma_m}{\omega\mu_0}, \quad (17)$$

där ϵ' och μ' är de vanliga förlustfria relativa materialparameterarna, σ och σ_m är materialets elektriska- och magnetiska ledningsförmåga.

Istället för att lösa både \mathbf{E} och \mathbf{H} ur Faradays lag (14) och Ampères lag (15) kan det ena fältstorheten elimineras, så att vi får vektor-vågekvationerna

$$\nabla \times [\mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E})] - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J} - \nabla \times (\mu_r^{-1} \mathbf{J}_m) \quad (18)$$

$$\nabla \times [\epsilon_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{H})] - k_0^2 \mu_r \mathbf{H} = -jk_0 \eta_0^{-1} \mathbf{J}_m + \nabla \times (\epsilon_r^{-1} \mathbf{J}), \quad (19)$$

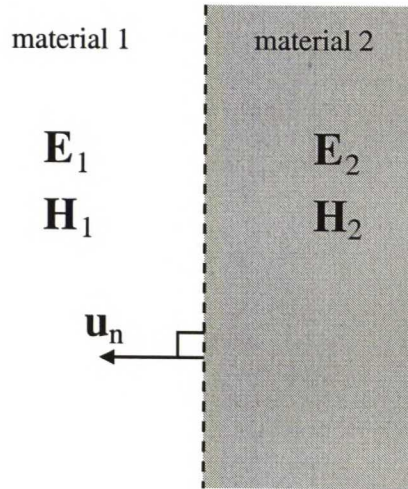
där vågtalet $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ och vågimpedansen $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ för vakuum. Vilkendera vågekvationen det lönar sig att använda beror bl.a. på randvillkoren.

Randvillkoren för en gränsyta mellan två olika dielektriska material (se bild 1) kan uttryckas som

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n \times \mathbf{E}_1 &= \mathbf{u}_n \times \mathbf{E}_2 \\ \mathbf{u}_n \times \mathbf{H}_1 &= \mathbf{u}_n \times \mathbf{H}_2, \end{aligned} \quad (20)$$

dvs. att de tangentiella fältkomponenterna är kontinuerliga. Ifall material 2 istället är en perfekt elektrisk ledare blir randvillkoren

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n \times \mathbf{E}_1 &= 0 \\ \mathbf{u}_n \times \mathbf{H}_1 &= \mathbf{J}_s, \end{aligned} \quad (21)$$



Figur 1: Gränsytan mellan två olika material

och för en perfekt magnetisk ledare

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n \times \mathbf{E}_1 &= -\mathbf{J}_{ms} \\ \mathbf{u}_n \times \mathbf{H}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

där \mathbf{J}_s och \mathbf{J}_{ms} är inducerade elektriska respektive magnetiska ytströmmar.

En alternativ formulering är att använda en kombination av en vektorpotential \mathbf{A} och en skalärpotential¹ Φ , som definieras med [2, 4]

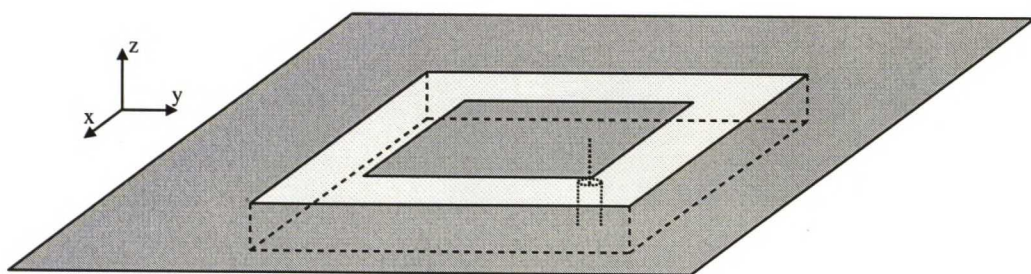
$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (23)$$

$$-j\omega(\nabla \Phi + \mathbf{A}) = \mathbf{E}. \quad (24)$$

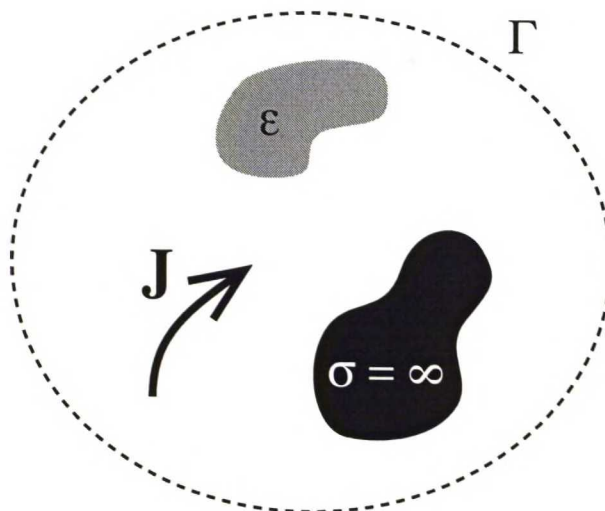
Med denna formulering får man en motsvarande vektor-vågekvation som ovan och något mer invecklade randvillkor. Här har man dessutom två okända istället för en. Orsaken till att denna formulering ändå är attraktiv är att den åtminstone i vissa fall ger en numeriskt effektivare lösning [4].

Finita elementmetoden kommer här att tillämpas på planara antenner liknande den i figur 2. Antennens form i xy -planet är godtycklig och det kan förutom antennmatningen också finnas kortslutningar. Substratet är ned-sänkt i ett oändligt ledande plan, främst för att underlätta beräkningen av strålningsdiagram. Dielektriska förluster kan beaktas, men alla ledande ytor antas vara idealledare.

¹Notera att denna skalärpotential inte är den samma som skalärpotentialen ϕ i elektrostatikens $\mathbf{E} = -\nabla \phi$.



Figur 2: En mikrostripantenn, vars substrat är nedsänkt i ett oändligt ledande plan



Figur 3: Begränsning av problemområdet

4 Begränsning av problemområdet

För att lösa ett problem med finita elementmetoden måste antalet element vara ändligt även om randvärdesproblemet i det här fallet är definierat på ett öppet område.

En vanlig lösning för antennproblem är att man definierar en gränsyta Γ som i figur 3 mindre än en våglängd från antennen och försöker få gränsytan att möjligast väl simulera det öppna området, antingen med hjälp av absorberande randvillkor eller någon hybrid metod. Istället för en enkel gränsyta kan man använda ett skikt med lämpligt absorberande material.

En alternativ lösning, som enligt samlingsverket [3] mest använts för statisk och kvasistatisk fältanalys, är att hela området diskretiseras – antingen direkt med speciella oändligt stora element eller med hjälp av någon lämplig geometrisk transformation som avbildar det oändliga problemområdet på ett ändligt område.

4.1 Hybrida metoder

Med hybrida metoder avses i allmänhet i det här sammanhanget kombinationen av finita elementmetoden innanför gränsytan Γ (figur 3), med någon formulering för det öppna yttre området som ger ett exakt randvillkor på gränsytan Γ .

Hybrida metoder var de första som användes för att med finita element-

metoden kunna simulera öppna områden och det finns mängder med artiklar publicerade om dessa. Samlingsverket [3] och översiktsartikeln [5] refererar vardera till över tjugo artiklar.

Fördelen med dessa hybrida metoder är att de är exakta, vilket gör att gränsytan Γ kan placeras hur nära som helst. Problemet är att de hybrida metodernas globala natur gör att det resulterande ekvationssystemet har en delvis full koefficientmatris. För ett godtyckligt tredimensionellt problem blir detta snabbt ett problem: redan lagrandet av koefficientmatrisen blir omöjligt för ett större problemområde.

Den hybrida metod som mest omnämns kallas FE-BI, *Finite-Element Boundary-Integral*, och den går ut på att gränsytan och det yttre området beskrivs med en rand- eller strålnings-integralformulering. Denna formulering är speciellt effektiv ifall problemområdet är nedsänkt i ett oändligt ledande plan eller en oändligt lång ledande cylinder. Ifall randytan dessutom är diskretiserad med jämnstora rektanglar kan man undvika att explicit lagra alla koefficienter, och effektivt lösa ekvationssystemet med en iterativ metod i kombination med en FFT-baserad matris-vektor produkt för rand-integraldelen av koefficientmatrisen. Denna metods tillämpning på mikrostripantenners nedsänkta i ett oändligt plan presenterades av Jin och Volakis i artikeln [6]. En grundlig behandling av metoden i allmänhet, och nämnda specialfall i synnerhet finns i boken [2].

4.2 Absorberande randvillkor

Meningen med ett absorberande randvillkor är att gränsytan skall verka möjligast transparent för utåtgående vågor, för att på det sättet simulera ett oändligt område.

Absorberande randvillkor är lokala, vilket innebär att det resulterande ekvationssystemet bibehåller sin glesa natur. Däremot är dessa randvillkor inte perfekt absorberande, vilket gör att gränsytan alltid måste placeras en bit ifrån antennen i fråga.

De första absorberande randvillkoren som lämpar sig för tredimensionella vektorvågor härstammar från Petersons artikel [7]. Något senare presenterade Webb och Kanellopoulos [8] första och andra gradens absorberande randvillkor som innehåller de förstnämnda randvillkoren som specialfall.

Randvillkoren kan formuleras med en operator \mathcal{P} , i det här fallet för elfältet \mathbf{E} .

$$\mathbf{u}_r \times \nabla \times \mathbf{E} = \mathcal{P}(\mathbf{E}) \quad (25)$$

De första och andra ordningens absorberande randvillkoren [8] kan uttryckas

som

$$\mathcal{P}_1(\mathbf{E}) = \alpha \mathbf{E}_t + (1 - s) \nabla_t E_r \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(\mathbf{E}) = & \alpha \mathbf{E}_t + \beta \nabla \times [\mathbf{u}_r (\nabla \times \mathbf{E})_r] \\ & + (s - 1) \beta \nabla_t (\nabla \cdot \mathbf{E}_t) \\ & + (2 - s) \alpha \beta \nabla_t E_r \end{aligned} \quad (27)$$

$$\alpha = jk$$

$$\beta = \frac{1}{2jk + \frac{2}{r}}$$

Parameter s ovan är en godtycklig parameter. Genom att välja $s = 1$ får man randvillkoren i [7]. Om man å andra sidan väljer $s = 2$ är operatoren \mathcal{P}_2 självadjungerad² vilket gör det enkelt att konstruera en lämplig funktional för en variationsformulering av problemet. Det resulterande ekvationssystemet förblir också symmetriskt, vilket annars inte är fallet.

Enligt en studie av Peterson [9] ger valet $s = 1$ något exaktare resultat än valet $s = 2$ för det absorberande randvillkoret av andra graden. Enligt samma studie är det teoretiska optimivärdet för s emellertid varken 1 eller 2 utan ungefär 0,5.

Randvillkoret av första graden är, enligt nämnda studie, markant sämre än det av andra graden, vilket också en tidigare jämförelse [10] visar.

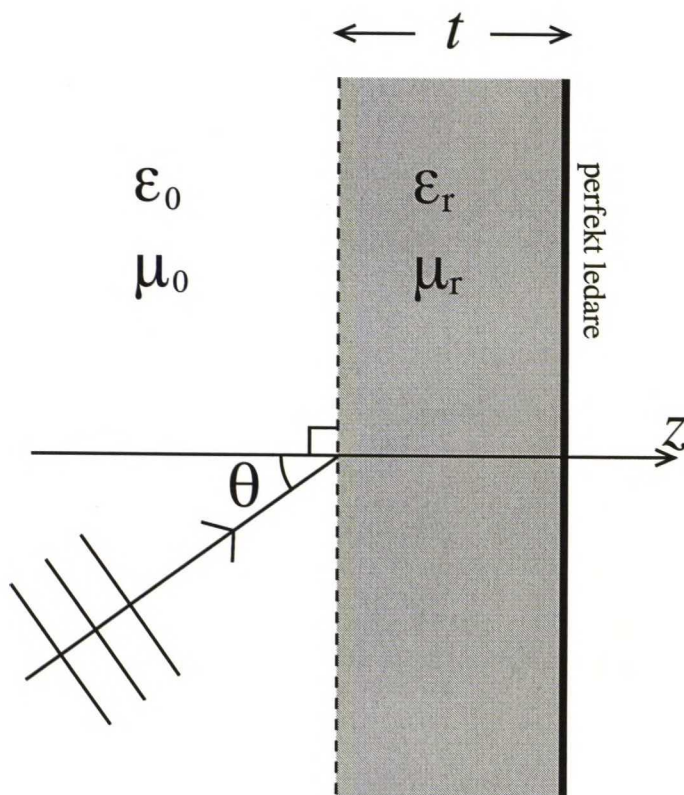
Ovannämnda randvillkor är härledda för sfäriska gränssytor, men de kan också framgångsrikt användas för plana gränssytor [11]. I praktiken har randvillkoren visat sig ge goda resultat placerade på $0,3 \lambda$:s avstånd, både för spridningsproblem [11] och för antennproblem [2].

Absorberande randvillkor för godtyckliga krökta ytor har också presenterats och använts med framgång [12, 13]. Ytorna beskrivs med huvudkrökningsradierna κ_1 och κ_2 , och ifall $\kappa_1 = \kappa_2$ ger randvillkoren upphov till ett symmetriskt ekvationssystem. Randvillkoren i [8] fås då $\kappa_1 = \kappa_2 = r$.

Numeriska absorberande randvillkor [14, 15] och högre gradens absorberande randvillkor [16] har också presenterats. Goda resultat rapporteras, men implementationen är betydligt besvärligare än för randvillkoren ovan (ekvationerna (26) och (27)).

Valet av absorberande randvillkor och gränssytans placering är ohjälpligt en fråga om kompromisser. På basen av ovannämnda artiklar verkar det som om en planar variant av \mathcal{P}_2 ovan (27) placerad $0,3 \lambda$ från antennen ifråga skulle vara ett lämpligt alternativ för detta antennproblem (bild 2).

²Utförligt bevisat i boken [1]

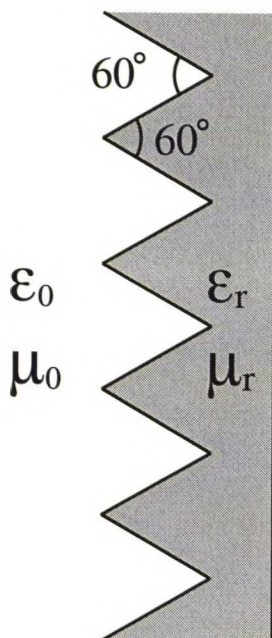


Figur 4: Absorberande material

4.3 Isotropiska absorberande material

Istället för ett absorberande randvillkor kan man använda ett materialskikt som i bild 4. Idén är att problemområdet avslutas med ett möjligast enkelt randvillkor, en idealledare, och att man minimerar den oönskade reflektionen med hjälp av ett lämpligt absorberande skikt. Två krav ställs på det absorberande materialet: för det första bör reflektionen vara så liten som möjligt vid den inre gränssytan och för det andra bör förlusterna i materialet vara tillräckligt stora.

Idén presenterades och verifierades första gången av Jin m.fl. i artiklarna [17] och [18]. Dessa artiklar behandlar tvådimensionella spridningsproblem och ett absorberande material bestående av tre homogena, isotropiska skikt med lämpligt valda parametrar. Den teoretiska reflektionskoefficienten för det absorberande materialet är mycket mindre än för ett andra gradens absorberande randvillkor. Numeriska experiment i nämnda artiklar visar dock



Figur 5: Ett kilformat absorberande material

att resultaten i fråga om såväl exakthet som effektivitet är ungefär lika bra med ett andra gradens absorberande randvillkor som med det presenterade absorberande materialet. Vidare poängteras att materialparametrarna är optimerade för antingen TE- eller TM-polarisation.

Ett absorberande material som till sin utformning mer liknar de man använder i ekofria rum har föreslagits av Rappaport och Bahrmassel [19]. Meningen med det kilformade materialet i figur 5 är att det i synnerhet är den andra reflektionen som minimeras. Materialparametrarna som använts är $\epsilon_r = \mu_r = 1 - j2$, och numeriska experiment bekräftar att absorptionen av planvågor i två dimensioner är effektiv för de tjocka skikt som undersökts i samma rapport. Tjockleken som använts är större än en våglängd, vilket knappast kan komma på fråga för ett tredimensionellt spridnings- eller antennproblem.

Senare presenterade Özdemir och Volakis ett enklare absorberande material [20]. Ett homogent isotropiskt skikt med materialparametrarna

$$\epsilon_r = \mu_r = \alpha - j\beta \quad (28)$$

rapporteras ge goda resultat för ett tredimensionellt spridningsproblem. Med ett absorberande skikt med tjockleken $t = 0,15 \lambda$ och materialparametrarna

$\epsilon_r = \mu_r = 1 - j2,7$ placerat på avståndet $0,15\lambda$ fås enligt nämnda artikel lika exakta resultat som med ett andra gradens absorberande randvillkor (samma som ekvation (27)) placerat på avståndet $0,30\lambda$. Antalet okända är något mindre och avsevärt kortare beräkningstider rapporteras. Samma absorberande material har också använts för antennproblem med goda resultat [21].

Den teoretiska reflektionskoefficienten för ett planart homogent isotropiskt skikt av tjockleken t (figur 4) kan beräknas med hjälp av Snells lag, transmissionslinje-analogi och så kallade vinkelräta impedanser (se t.ex. [22]). Resultaten för TE-polarisation (infallande elfältet vinkelrätt mot ytnormalen) och TM-polarisation (infallande magnetfältet vinkelrätt mot ytnormalen) blir:

$$R_{TE}(\theta) = -\frac{\sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta} - j \cos \theta \tan(k_0 b t \sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta})}{\sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta} + j \cos \theta \tan(k_0 b t \sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta})} \quad (29)$$

$$R_{TM}(\theta) = -\frac{\cos \theta - j \sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta} \tan(k_0 b t \sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta})}{\cos \theta + j \sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta} \tan(k_0 b t \sqrt{1 - b^{-2} \sin^2 \theta})} \quad (30)$$

$$b = \epsilon_r = \mu_r = \alpha - j\beta$$

4.4 Anisotropiska absorberande material

Problemet med de isotropiska absorberande material som använts i artiklarna [20, 21] är att gränssytan mellan luften och materialet i fråga är reflektionslös bara för planvågor som infaller vinkelrätt mot gränssytan.

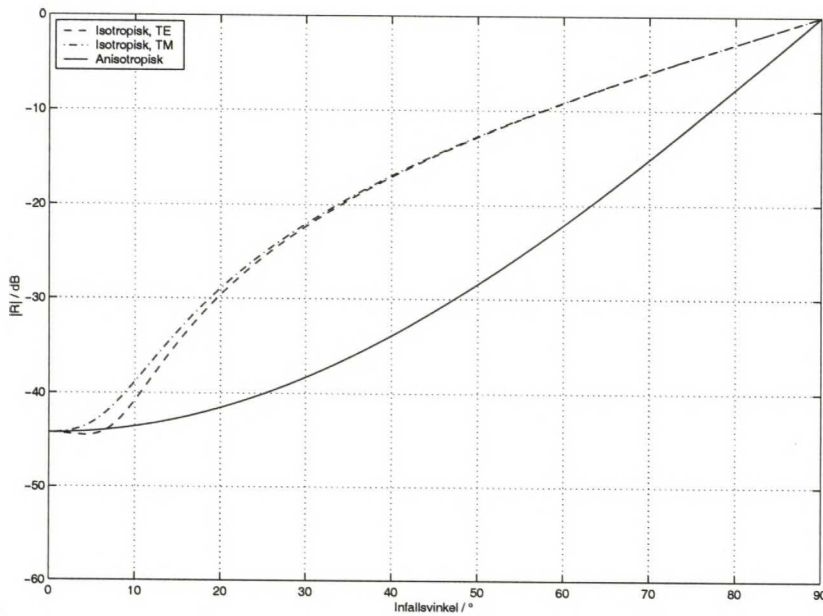
Sacks m.fl. presenterade i artikeln [23] ett anisotropiskt material som i teorin är reflektionslöst oberoende av infallsvinkeln. Materialparametrarna är beroende av gränssytans orientering. För planet $z = 0$ är materialparametrarna

$$\bar{\epsilon}_r = \bar{\mu}_r = \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha - j\beta} \end{bmatrix} \quad (31)$$

där $\alpha > 0$ bestämmer våglängden i materialet och $\beta > 0$ hur snabbt den transmittade vågen dämpas.

Det anisotropiska absorberande materialet används på samma sätt som det isotropiska i figur 4. Den inre gränssytan är reflektionsfri, men den yttre gränssytan ger en totalreflektion, vilket gör att materialets förluster måste väljas så att sträckan $2t$ dämpar den transmittade vågen tillräckligt. Den teoretiska reflektionskoefficienten blir, oberoende av polarisationen [23]:

$$|R(\theta)| = e^{-2k_0 \beta t \cos \theta} \quad (32)$$



Figur 6: Teoretiska reflektionskoefficienter för homogena isotropiska och anisotropiska absorberande material med tjockleken $t = 0,15 \lambda$ samt parametrarna $\alpha = 1$ och $\beta = 2,7$

En jämförelse av denna reflektionskoefficient och de för motsvarande isotropiska material (ekvationerna (29) och (30)) som funktion av infallsvinkeln θ finns i figur 6. Reflektionskoefficienten för vinkelrätt infall ($\theta = 0$) är lika för såväl isotropiska som anisotropiska material, och den kan i princip fås hur liten som helst. Fördelen med det anisotropiska skiktet märks däremot tydligt för större infallsvinklar. Skillnaden blir ännu markantare ifall man väljer större $k_0 \beta t$ för att få mindre reflektion. Då $\theta \rightarrow 90^\circ$ får man ohjälpligt en totalreflektion också med det anisotropiska materialet.

I teorin kunde man fritt välja βt så att ekvation (32) ger önskat låg reflektionskoefficient. I praktiken har också parametrarna α och diskretiseringen av materialet en stor inverkan. I artiklarna [24, 25, 26] finns en del såväl teoretiska som empiriska resultat som visar hur man optimalt kan välja parametrarna för att få önskade resultat. Designkurvorna och -ekvationerna i artikeln [26] är omfattande, och tycks fungera bra åtminstone enligt de testfall som omnämns i samma artikel.

Ett anisotropiskt absorberande skikt med parametrarna $\alpha = \beta = 4,2$ och tjockleken $t = 0,1 \lambda \dots 0,2 \lambda$ uppges ge goda resultat för ett tredimensionellt spridningsproblem [25]. De absorberande materialet var placerat endast $0,05 \lambda$ från ett perfekt ledande klot med diametern $0,4 \lambda$.

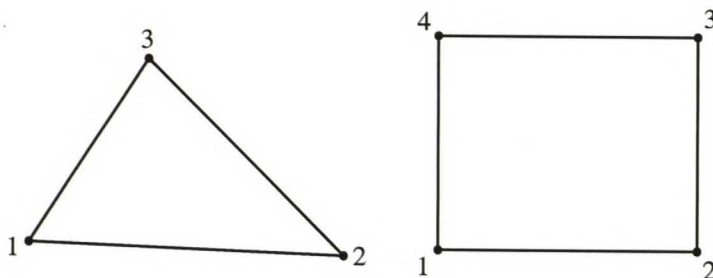
4.5 Vald lösning

För detta antennproblem har jag valt att använda ett isotropiskt homogent absorberande material som motsvarar det i artiklarna [20, 21]: materialparametrarna $\epsilon_r = \mu_r = 1 - j2,7$ och tjockleken $t = 0,15\lambda$. Denna lösning är förmodligen den enklaste att implementera och den absorberande gränsytaform är inte begränsad på något sätt.

Ett absorberande randvillkor, t.ex. $\mathcal{P}_2(\mathbf{E})$ i ekvation (27), är svårare att implementera. Enligt de numeriska experimenten i artikeln [20] ger detta randvillkor och det valda materialet ungefär lika goda resultat, men det absorberande materialet ger klart kortare beräkningstider.

Den hybrida metod som använts i artikeln [6] skulle vara mycket lämpad för just denna typ av antennproblem. Goda resultat i frågan om både exakthet och effektivitet kunde väntas, men användningen av jämnstora rätblock för diskretiseringen av problemområdet begränsar antennernas form avsevärt. Istället för att själv implementera denna metod har jag valt att som jämförelse använda programmet LM_BRICK [27].

Ett anisotropiskt absorberande material skulle troligen ge exaktare resultat eller en möjlighet att minska på avståndet till gränsytan. Implementeringen blir besvärligare, och den absorberande gränsytan bör bestå av plan där en av de kartesiska koordinaterna är konstant. Dessutom ger dessa material upphov till ekvationssystem vars lösning konvergerar mycket långsammare med en iterativ lösningsmetod [2].



Figur 7: Tvådimensionella nodbaserade element

5 Element och basfunktioner

Lösningen av ett problem med finita elementmetoden kräver att problemområdet i fråga delas upp i ett antal delområden eller element. Valet av element och tillhörande interpolations- eller basfunktioner är av stor vikt för att få en tillförlitlig lösning.

Tre fundamentala krav ställs på ett bra element: elementen måste medge att alla randvillkor och kontinuitetskrav uppfylls, formuleringen bör vara konvergent så till vida att en finare uppdelning i ett större antal mindre element ger allt exaktare resultat, och sist men inte minst bör elementens form vara sådan att det går möjligast enkelt och effektivt att diskretisera hela problemområdet. [3]

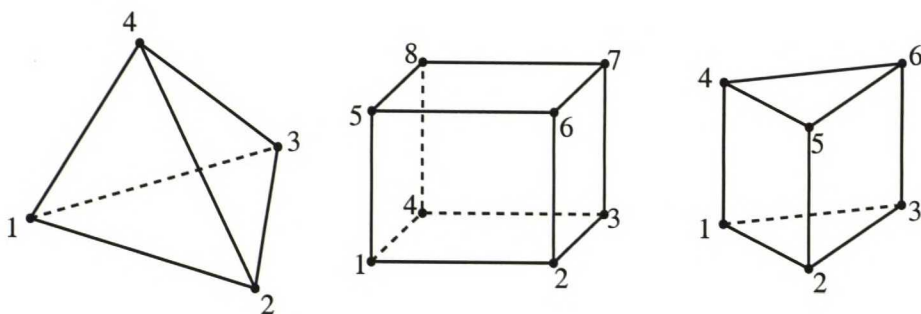
Valet av element beror såväl på problemformuleringen som på problemets geometri och är i allmänhet en kompromiss mellan olika egenskaper.

För att, som i det här fallet, modellera ett vektorfält har två olika huvudtyper av element använts: traditionella skalära nodbaserade element med vektorstorheten uppdelad i komponenter, och kantelement där basfunktionerna i sig är vektorfält.

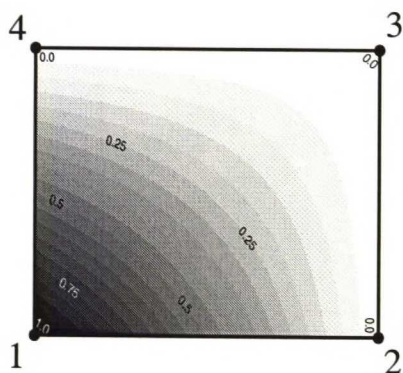
5.1 Nodbaserade element

Nodbaserade element är till sin natur skalära, och har sina koefficienter associerade med värdet på den sökta funktionen på olika punkter eller noder. För enkla linjära element sammanfaller noderna med elementets hörn, medan högre ordningens element har flera noder. Några vanliga två- och tredimensionella linjära nodbaserade element med tillhörande nodnumrering finns i figur 7 och 8.

Basfunktionerna för nodbaserade element är alla sådana att de är 1 vid en nod och 0 vid alla andra. T.ex. för ett linjärt nodbaserat rektangel-element



Figur 8: Tredimensionella nodbaserade element

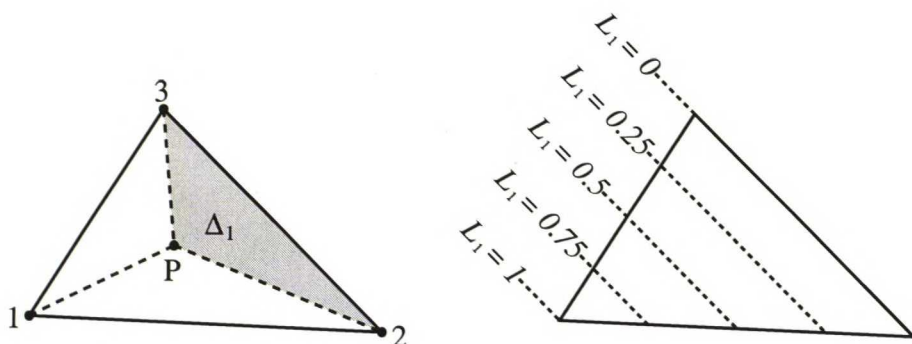
Figur 9: Basfunktionen N_1^e för ett nodbaserat rektangel-element

kan basfunktionerna formuleras som [2]

$$\begin{aligned}
 N_1^e &= \frac{1}{A^e} \left(x_c^e + \frac{h_x^e}{2} - x \right) \left(y_c^e + \frac{h_y^e}{2} - y \right) \\
 N_2^e &= \frac{1}{A^e} \left(-x_c^e + \frac{h_x^e}{2} + x \right) \left(y_c^e + \frac{h_y^e}{2} - y \right) \\
 N_3^e &= \frac{1}{A^e} \left(-x_c^e + \frac{h_x^e}{2} + x \right) \left(-y_c^e + \frac{h_y^e}{2} + y \right) \\
 N_4^e &= \frac{1}{A^e} \left(x_c^e + \frac{h_x^e}{2} - x \right) \left(-y_c^e + \frac{h_y^e}{2} + y \right),
 \end{aligned} \tag{33}$$

där A^e är rektangelns area, (x_c^e, y_c^e) dess mittpunkt och h_x^e, h_y^e dess höjder i x- och y-riktning. Basfunktionen N_1^e finns också som figur 9.

Basfunktionerna för ett triangel-element är svårare att uttrycka med kartesiska koordinater, och man brukar istället använda lokala så kallade *area-*



Figur 10: Area-koordinater för en triangel $L_i = \Delta_i/\Delta$

koordinater (L_1, L_2, L_3) . Areakoordinaterna för en punkt P inne i en triangel (se figur 10) kan definieras som

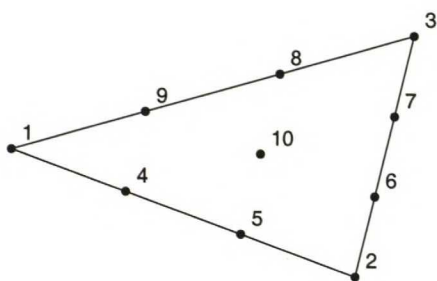
$$L_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (34)$$

där Δ är triangelns area och Δ_i är arean av triangeln som bildas av punkten P och sidan mitt emot hörnet i . Areakoordinaten L_i är 1 vid hörnet i , 0 längs sidan mitt emot och varierar linjärt däremellan, så för ett linjärt element är basfunktionerna helt enkelt de samma som areakoordinaterna $N_i^e = L_i^e$. [1, 2]

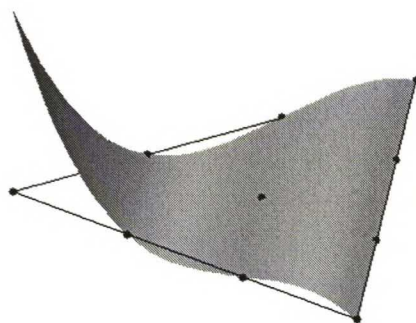
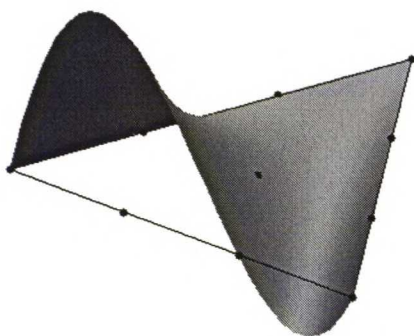
Motsvarande basfunktioner i tre dimensioner (rätblock och tetraedrar) finns bl.a. i böckerna [1, 2], och är naturliga generaliseringar av basfunktionerna ovan.

Linjära element är förmodligen de enklaste att använda, men de innebär ofta en grov approximation av den sökta funktionen, vilket medför att det kan behövas ett mycket stort antal element för att få en tillfredsställande lösning. Ett alternativt sätt att förbättra precisionen är att använda element av högre grad. T.ex. i boken [1] beskrivs konstruktionen av triangel-element av godtycklig grad. Antalet noder och okända komponenter ökar givetvis med gradtalet: kvadratiske triangel-element har t.ex. 6 noder, medan ett tredje gradens element redan har 10. Nodernas placering och några basfunktioner för ett tredje gradens element finns i figur 11.

Såväl rektangel- som triangel-elementen ovan har C^0 kontinuitet, dvs. att den sökta funktionen är kontinuerlig mellan olika element. För att åstadkomma C^1 kontinuitet, dvs. att även första derivatan är kontinuerlig mellan olika element, behövs det enligt boken [2] nionde gradens basfunktioner för tetraeder-element. Att hitta lämpliga basfunktioner för ett dylikt element påstås vidare vara mycket svårt.



(a) Nodnumrering

(b) Basfunktionen N_1^e (c) Basfunktionen N_4^e (d) Basfunktionen N_{10}^e

Figur 11: Några av basfunktionerna för ett tredje gradens nodbaserat triangel-element. Basfunktionen N_i^e är 1 vid nod nummer i och 0 vid alla andra noder.

5.2 Kantelement

Nodbaserade element lämpar sig väl för problem som kan formuleras med någon skalär storhet, så som skalärpotentialen ϕ för statiska elfält $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Då nodbaserade element används för att modellera ett el- eller magnetfälts vektorkomponenter uppstår däremot problem: ofysikaliska lösningar förekommer, det är besvärligt att se till att randvillkoren mellan olika dielektriska material och randvillkoren för idealledare uppfylls, och sist men inte minst är det svårt att modellera singulariteterna som uppstår vid ledande eller dielektriska hörn [1]. Kantelement råder till stor del bot på alla dessa problem.

Kantelement har vektor-basfunktioner och de okända koefficienterna är associerade med den sökta vektor-funktionens tangentiella komponent vid respektive kant. För ett triangelement kan basfunktionerna (se figur 12) formuleras som

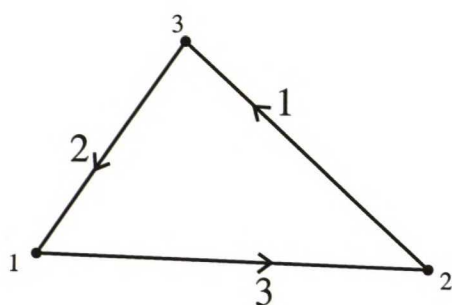
$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1^e &= (L_2^e \nabla L_3^e - L_3^e \nabla L_2^e) d_1^e \\ \mathbf{W}_2^e &= (L_3^e \nabla L_1^e - L_1^e \nabla L_3^e) d_2^e \\ \mathbf{W}_3^e &= (L_1^e \nabla L_2^e - L_2^e \nabla L_1^e) d_3^e, \end{aligned} \quad (35)$$

där L_i^e är samma area-koordinater som ovan (figur 10, ekvation (34)), och d_i^e är längden på respektive kant i . Basfunktionen \mathbf{W}_i^e har en tangentiell komponent $\neq 0$ endast längs kanten i där den är konstant $= 1$. Normalkomponenten varierar linjärt längs alla kanter. Basfunktionerna är källfria $\nabla \cdot \mathbf{W}_i^e = 0$ och de har en konstant rotation $\nabla \times \mathbf{W}_i^e \neq 0$.

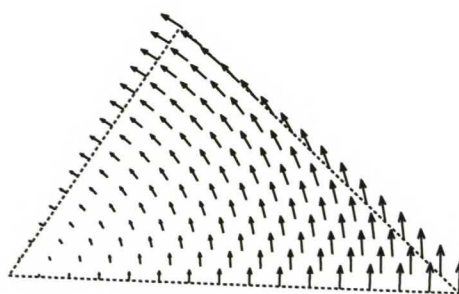
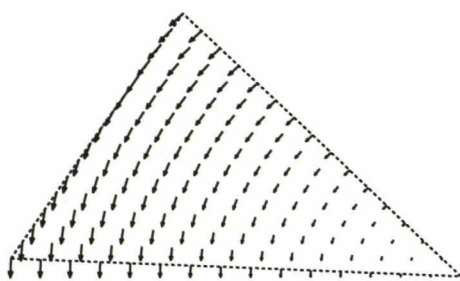
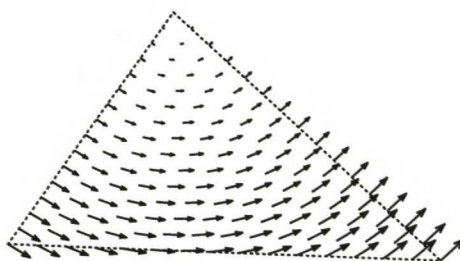
Kantelementens ursprung anses av många referenser vara Whitneys bok från år 1957 [28]³, medan andra referenser nämner Nedelecs artikel från år 1980 [30]. Beroende på utgångspunkten kan man antingen se kantelementen som Whitney element av grad 1 eller som Nedelec-element tillhörande $H^0(curl)$, där $H^k(curl)$ består av de vektorer som är kvadratisk integrerbara och vars rotation är kompletta polynom av grad k . Praktiskt tillämpbara kantelement i två och tre dimensioner med tillhörande basfunktioner och en del formler som hjälper att evaluera elementmatriserna för ifrågavarande element finns t.ex. i böckerna [1, 2].

Orsaken till att ofysikaliska lösningar uppstår med nodbaserade element men inte med kantelement har förklarats på olika sätt. En, förmodligen matematiskt elegant, förklaring återfinns i en översiktsartikel av Webb [31]. En annan förklaring [1] utgår från observationen att formuleringen med nodba-

³T.ex. Bossavits artikel [29] förklarar Whitneys element kortfattat och ur en mera elektromagnetisk synvinkel. Att hitta några direkt tillämpbara finita element i Whitneys bok [28] verkar mycket svårt.



(a) Nod- och kantnumrering

(b) Basfunktionen W_1^e (c) Basfunktionen W_2^e (d) Basfunktionen W_3^e

Figur 12: Ett triangel-kantelement och dess basfunktioner

serade element inte uppfyller Maxwells divergensekvationer

$$\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0 \quad (36)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho, \quad (37)$$

utan att lösningen kan vara starkt divergent, vilket t.ex. tydligt framgår i exemplen i artikeln [32].

Med nodbaserade element är alla vektorkomponenter kontinuerliga, vilket medför problem för dielektriska gränssytor där endast den tangentiella fältkomponenten skall vara kontinuerlig (20). Ifall antingen μ eller ϵ är konstant kan man förstås kringgå problemet genom att välja rätt fältstorhet som okänd, men ifall vardera varierar är det problematiskt att få randvillkoren rätt.

Singulariteterna som är förknippade med dielektriska och ledande hörn är ett större problem. För t.ex. ett ledande vasst hörn finns det två problem: dels är elfältet oändligt vid hörnet och dels ändrar elfältets riktning oändligt snabbt. Även här ställer nodbaserade elements kontinuitet till med problem.

Kantelement besitter två egenskaper som råder bot på de ovannämnda problemen: för det första är de *källfria* $\nabla \cdot \mathbf{W}_i^e = 0$, och för de andra medför de endast *tangentiell kontinuitet*. Källfriheten gör att de ofysikaliska lösningar som kan fås med nodbaserade element elimineras. Den minskade kontinuiteten gör att randvillkoren mellan olika dielektriska material (20) uppfylls exakt, förutsatt att materialparametrarna μ och ϵ är konstanta inom varje enskilt element. Fältets normalkomponent är generellt diskontinuerlig mellan olika element, vilket är vad som också behövs vid materialgränssytor och ledande ytor.

Problemet med singulariteter vid vassa hörn löses till hälften med kantelement i och med att fältets riktning kan ändra oändligt snabbt vid hörnet i fråga. Fältets oändliga värde är fortfarande ett problem, men globalt sätt blir lösningen i varje fall bättre [31].

Förutom de ovannämnda kantelementen kan också högre ordningens vektorbaserade element användas. Antalet koefficienter per element ökar givetvis, och förutom att flera koefficienter kan vara associerade med samma kant behövs också koefficienter som är associerade med elementens ytor och volym. Basfunktioner av godtycklig ordning, såväl källfria $\nabla \cdot \mathbf{W}_i^e = 0$ som virvelfria $\nabla \times \mathbf{W}_i^e = 0$, presenteras i artikeln [33] för trianglar, fyrkanter, tetraedrar och rätblock och i artikeln [34] för prismor.

5.3 Räta triangulära prismor som kantelement

För godtyckliga tredimensionella geometrier är tetraeder-element de mest flexibla. I det här fallet har jag istället valt att använda räta triangulära

prismor av två orsaker: för det första blir antalet okända något mindre, och för det andra är det lättare att diskretisera problemområdet. Diskretiseringen behandlas i sektion 6 nedan, medan de valda elementen och dess basfunktioner behandlas här.

De element som används här härstammar från artikeln [21]. Samma element finns också presenterade i boken [2], och så länge prismorna inte tillåts vara sneda är basfunktionerna ekvivalenta med de som presenteras i artikeln [34].

Ifall prism-elementets kanter numreras som i figur 13 kan basfunktionerna formuleras som

$$\mathbf{W}_1^e = d_1^e (L_2^e \nabla L_3^e - L_3^e \nabla L_2^e) (1 - z/c^e) \quad (38)$$

$$\mathbf{W}_2^e = d_2^e (L_3^e \nabla L_1^e - L_1^e \nabla L_3^e) (1 - z/c^e) \quad (39)$$

$$\mathbf{W}_3^e = d_3^e (L_1^e \nabla L_2^e - L_2^e \nabla L_1^e) (1 - z/c^e) \quad (40)$$

$$\mathbf{W}_4^e = d_1^e (L_2^e \nabla L_3^e - L_3^e \nabla L_2^e) (z/c^e) \quad (41)$$

$$\mathbf{W}_5^e = d_2^e (L_3^e \nabla L_1^e - L_1^e \nabla L_3^e) (z/c^e) \quad (42)$$

$$\mathbf{W}_6^e = d_3^e (L_1^e \nabla L_2^e - L_2^e \nabla L_1^e) (z/c^e) \quad (43)$$

$$\mathbf{W}_7^e = L_1^e \mathbf{u}_z \quad (44)$$

$$\mathbf{W}_8^e = L_2^e \mathbf{u}_z \quad (45)$$

$$\mathbf{W}_9^e = L_3^e \mathbf{u}_z, \quad (46)$$

där L_i^e är bastriangelns area-koordinater (jmf. figur 10), d_i^e är längden på bastriangeln kant i och c^e är prismats höjd. Bastriangeln är i xy -planet och kanterna 7...9 $\parallel \mathbf{u}_z$. Tre av basfunktionerna finns i figur 14, och de sex övriga fås genom att rotera prisma runt z -axeln.

Basfunktionen \mathbf{W}_i^e har en tangentiell komponent $\neq 0$ bara längs kant nummer i och dess närliggande sidor, vilket gör att den tangentiella fältkomponenten blir kontinuerlig mellan elementen. Basfunktionerna är normaliserade så att deras tangentiella komponent längs respektive kant = 1.

Vidare är basfunktionerna källfria

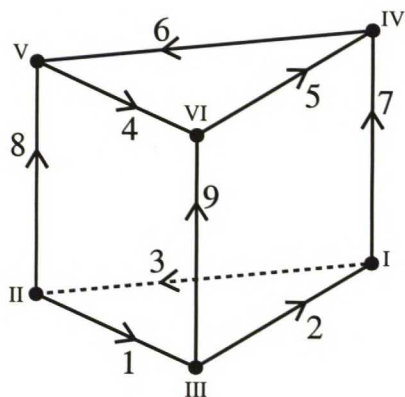
$$\nabla \cdot \mathbf{W}_i^e = 0 \quad i \in [1, 9], \quad (47)$$

och rotationerna är

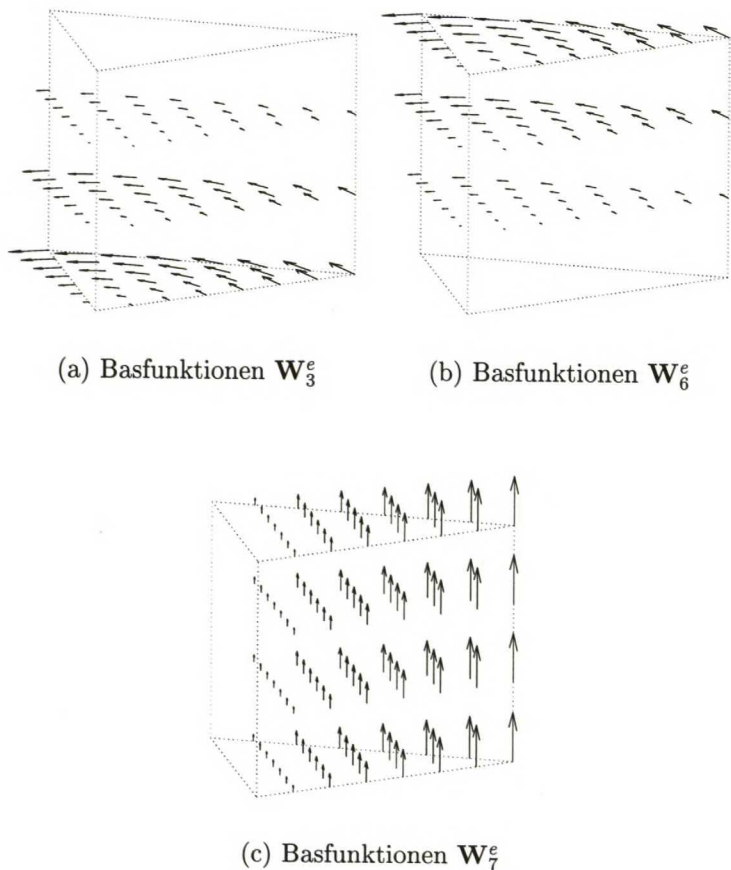
$$\nabla \times \mathbf{W}_i^e = 2d_i^e (1 - \frac{z}{c^e}) \sin(\alpha_i) \mathbf{u}_z \quad i \in [1, 3] \quad (48)$$

$$\nabla \times \mathbf{W}_j^e = 2d_{j-3}^e \frac{z}{c^e} \sin(\alpha_{j-3}) \mathbf{u}_z \quad j \in [4, 6] \quad (49)$$

$$\nabla \times \mathbf{W}_k^e = \mathbf{u}_z \times \nabla L_k^e = \mathbf{u}_{k-6}^e / c^e \quad k \in [7, 9], \quad (50)$$



Figur 13: Nod- och kantnumrering för ett rätt prism-element (noderna med romerska siffror)



Figur 14: Tre av basfunktionerna för prism-elementet i figur 13

där \mathbf{u}_i^e är en enhetsvektor riktad enligt kant nummer $i \in [1, 9]$ och α_i är den vinkel i bastriangeln som är mitt emot kant $i \in [1, 3]$. Basfunktionerna $\mathbf{W}_1^e \dots \mathbf{W}_6^e$:s rotation varierar linjärt med z medan basfunktionerna $\mathbf{W}_7^e \dots \mathbf{W}_9^e$:s rotationer är konstanta. Rotationen $\nabla \times (\mathbf{W}_i^e + \mathbf{W}_{i+3}^e)$, $i \in [1, 3]$ är konstant, så summa sumarum har vi ett $H^0(\text{curl})$ -element. T.ex. $\nabla \times \mathbf{W}_7^e$, $\nabla \times \mathbf{W}_8^e$ och $\nabla \times (\mathbf{W}_1^e + \mathbf{W}_4^e)$ är konstanta och linjärt oberoende och basfunktionerna är utan vidare kvadratisk integrerbara.

6 Diskretisering av problemområdet

Finita elementmetoden kräver som sagt att hela problemområdet delas upp i ett ändligt antal element utan överlappningar. Denna diskretisering eller nätgenerering kan ses som en förberedande process som åtminstone delvis kan separeras från resten av lösningen. En mängd olika nätgeneratorer för olika ändamål existerar: en kartläggning av Owen [35] nämner t.ex. hela 94 olika nätgeneratorer. En betydande del av dessa, 38 st, är dessutom *public domain*-program.

6.1 Krav på nätgenereringen

Förutom kravet att hela problemområdet skall diskretiseras utan överlappningar – vilket i sig inte behöver vara enkelt för ett generellt tredimensionellt problem – ställs det en del övriga krav på en bra nätgenerator. Såväl elementens typ som deras storlek och form påverkar resultatens noggrannhet, och beroende på formuleringen kan t.ex. randvillkoren och antennenmatningen ställa vissa krav på diskretiseringen. I det här fallet skall elementkanter och -sidor sammanfalla med de dielektriska gränssytor som finns så att varje element har konstanta väldefinierade materialparametrar. Ledande ytor får inte heller dela element.

Elementens storlek är i grund och botten en kompromiss mellan precision och snabbhet. Å ena sidan måste elementen vara tillräckligt små för att lösningen skall ha acceptabel precision. Å andra sidan måste elementen vara tillräckligt stora så att antalet element och därigenom antalet okända inte blir för stort.

Vad som är *tillräckligt små* element har jag inte hittat något bra svar på. Det verkar som om kantlängder på $\lambda/20 \dots \lambda/10$ skulle vara en rimlig gissning att utgå ifrån, men där lösningen har singulariteter räcker detta knappast. Den uppenbara lösningen med en jämn diskretisering skulle förstås vara att minska på elementens storlek tills lösningen stabiliserar sig eller beräkningskapaciteten tar slut. Ifall man t.ex. använder trianglar eller tetraedrar finns

dessutom möjligheten att göra diskretiseringen finare endast där det verkar behövas enligt någon lämplig adaptiv algoritm.

Elementens form påverkar också i viss mån lösningens noggrannhet och hur snabbt en iterativ lösningsalgoritm löser ekvationssystemet som uppstår. Små vinklar eller tillplattade trianglar har ansetts dåliga, liksom också tillplattade eller vassa nålliknande tetraedrar. Några relativt färskartiklar [36, 37, 38, 39] visar dock att det inte nödvändigtvis är så enkelt.

Berzins artikel [39] innehåller en kort översikt över många kvalitetskrav som presenterats för trianglar och tetraedrar, såväl sådana som baserar sig på elementens geometri som sådana som baserar sig på problemets lösning. Två exempel som baserar sig på lösningen av Laplace-ekvationen $\nabla^2 U = 0$ framförs, och artikelns slutsats är att ingendera infallsvinkeln i sig är tillfredsställande, utan att såväl geometrin som lösningen borde beaktas.

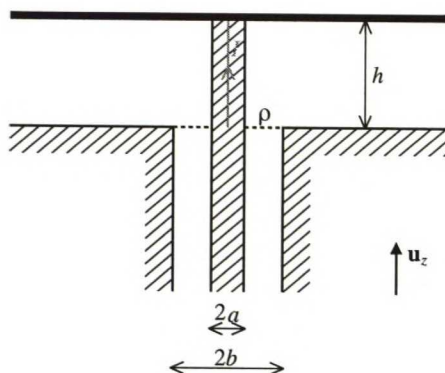
Tsukermans artiklar [36, 37, 38] är såtillvida intressantare att även kantelement betraktas. Ett mått på hur elementens form påverkar lösningens noggrannhet presenteras, och numeriska experiment i artikeln [38] visar att fel-estimatet som fås väl korrelerar med de egentliga felen i lösningen. Mest behandlas tetraeder-element, men teorin borde gå att applicera även på andra elementformer. Ett större problem är att de fält som approximeras med kantelement – åtminstone i exemplen – antas vara konservativa fält (t.ex. elfältet $\mathbf{E} = -\nabla\phi$).

Något bra estimat för hur olika elementformer påverkar just detta antennproblem har jag alltså inte hittat. I brist på bättre antar jag att prismornas bastrianglar helst inte skall ha varken mycket små eller mycket stora vinklar, och att prismornas höjd skall vara av samma storleksordning som bastriangelns kanter.

6.2 Vald lösning

Valet av elementform och nätgenerator hänger långt ihop. Prism-element verkade vettiga pga. geometrin och utbudet på nätgeneratorer som använder sig av trianglar är stort [35]. Efter att ha bekantat mig med några olika nätgeneratorer valde jag att använda TRIANGLE [40, 41] för att diskretisera en godtycklig antenn-geometri i xy -planet, och sedan är det enkelt att på basen av detta nät generera lämpligt höga prismor i z -riktningen.

TRIANGLE erbjuder en möjlighet att påverka diskretiseringen dels genom att specificera en minimi-vinkel och dels en maximi-area för trianglarna. Maximi-arean kan specificeras skilt för olika områden. Snabbheten är dessutom mer än tillräcklig.



Figur 15: Tvärsnitt av antennmatningen: a och b är koaxialkabelns inner- respektive yttre radie, h är substratets höjd, ρ är koaxialkabelns aperturarea och I är matningsströmmen

7 Antennmatning

Planara antenner kan matas på olika sätt, varav direkt kopplade mikrostrip-ledningar och koaxialkablar torde vara de vanligaste. Några sätt att modellera en koaxialkabel-matning behandlas här; en mer omfattande översikt hittas t.ex. i boken [2].

Det enklaste sättet att simulera en koaxialkabel-matning (figur 15) är att ersätta den med en oändligt tunn strömtäthet $Ih\mathbf{u}_z$, där I är matningsströmmen och h är dess längd, vilket samtidigt är substratets höjd. Förutsättningen för att denna modell skall fungera är att substratet är tunt $h \ll \lambda$. Dels beaktas inte koaxialkabelns tjocklek och dels är antagandet att matningsströmmen är konstant inte rimligt ifall substratet är tjockt [2].

En annan enkel exitering är att specificera spänningen V över ett smalt gap [2], som i det här fallet skulle vara mellan koaxialkabelns inre och yttre ledare. Elfältskomponenterna i koaxialkabelns apertur ρ fungerar således som matning, och koaxialkabelns inre ledare modelleras som en vanlig idealledare.

En mera sofistikerad modell presenteras i artikeln [42]. Modellen baserar sig på antagandet att endast det dominerande TEM-fältet

$$\mathbf{E} = \frac{e_0}{r} \mathbf{u}_r \quad \mathbf{H} = \frac{h_0}{r} \mathbf{u}_\varphi \quad (51)$$

förekommer i koaxialkabelns apertur. Det här införs sedan i FEM-systemet med hjälp av en ekvipotentialformulering istället för att kräva att de tangentiella fältskomponenterna skulle vara kontinuerliga. Enligt de numeriska resultat som presenteras i nämnda artikel ger denna modell klart exaktare

antennimpedans än en enkel matningsström för något tjockare substrat. Antennerna i fråga är runda mikrostrip-antennar med radierna $r_1 = 13$ mm och $r_2 = 20$ mm med substrattjocklekar på $h_1 = 4,1$ mm respektive $h_2 = 2,2$ mm.

Jag har valt att använda den förstnämnda enklaste modellen, enligt antagandet att antennerna som här analyseras har tillräckligt tunna substrat. Vidare fås samma resonansfrekvens med såväl denna enkla modell som med den mer sofistikerade koaxialkabelmodellen enligt artikeln [42], så ifall resultaten blir bra i fråga om resonansfrekvens men impedansvärdena verkar fel kan man misstänka att en bättre modell av antennmatningen borde användas. För att underlätta implementationen har jag sett till att problemområdet diskretiseras så att en eller flera kanter sammanfaller med antennmatningen.

8 Formulering av ekvationssystemet

Med de ovan motiverade valen formuleras antennproblemet med elfältet \mathbf{E} som

$$\nabla \times [\mu_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{E})] - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{J} \quad (52)$$

$$\mathbf{u}_n \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{på } S_0, \quad (53)$$

där materialparametrarna μ_r och ϵ_r är komplexa, vågtalet $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ och vågimpedansen $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$. Elfältets tangentiella komponent är automatiskt kontinuerlig tack vare de valda kantelementen, medan randvillkoren för idealledare måste uppfyllas explicit på ledarytorna S_0 . Exiteringen sköts av strömmen \mathbf{J} .

En lämplig ekvivalent funktional hittas t.ex. i böckerna [1, 2]

$$\begin{aligned} F(\mathbf{E}) = & \frac{1}{2} \iiint_V \left[\frac{1}{\mu_r} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \right] dV \\ & + jk_0 \eta_0 \iiint_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV. \end{aligned} \quad (54)$$

Dessutom måste idealledar-randvillkoret fortfarande uppfyllas. Problemområdet V är indelat i M element och varje element har 9 basfunktioner:

$$\mathbf{E} \approx \sum_{e=1}^M \mathbf{E}^e \quad (55)$$

$$\mathbf{E}^e = \sum_{i=1}^9 E_i^e \mathbf{W}_i^e = \{E^e\}^T \{\mathbf{W}^e\} = \{\mathbf{W}^e\}^T \{E^e\} \quad (56)$$

Genom att använda funktionalen på ett enskilt element får vi

$$\begin{aligned} F^e &= F(\mathbf{E}^e) \\ &= \frac{1}{2} \{E^e\}^T [A^e] \{E^e\} - \frac{k_0^2}{2} \{E^e\}^T [B^e] \{E^e\} \\ &\quad + k_0 \{E^e\}^T \{C^e\}, \end{aligned} \quad (57)$$

där elementen i matriserna $[A^e]$ och $[B^e]$ samt kolumnvektorn $\{C^e\}$ är

$$A_{ij}^e = \frac{1}{\mu_r^e} \iiint_{V^e} (\nabla \times \mathbf{W}_i^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{W}_j^e) dV \quad (58)$$

$$B_{ij}^e = \epsilon_r^e \iiint_{V^e} \mathbf{W}_i^e \cdot \mathbf{W}_j^e dV \quad (59)$$

$$C_i^e = j\eta_0 \iiint_{V^e} \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}_i dV, \quad (60)$$

där V^e är elementets volym medan μ_r^e och ϵ_r^e är relativa permeabiliteten respektive permittiviteten för elementet i fråga. Materialet antas homogent inom respektive element.

I enlighet med Ritz' metod söker vi funktionalens stationära punkt genom att derivera funktionalen med avseende på de sökta koefficienterna och kräva att derivatorna = 0, vilket i matrisform kan skrivas som

$$\left\{ \frac{\partial F^e}{\partial E^e} \right\} = ([A^e] - k_0^2 [B^e]) \{E^e\} + k_0 \{C^e\} = 0 \quad (61)$$

för ett element. Genom att kombinera alla dessa M elementekvationer får vi sedan ett linjärt ekvationssystem

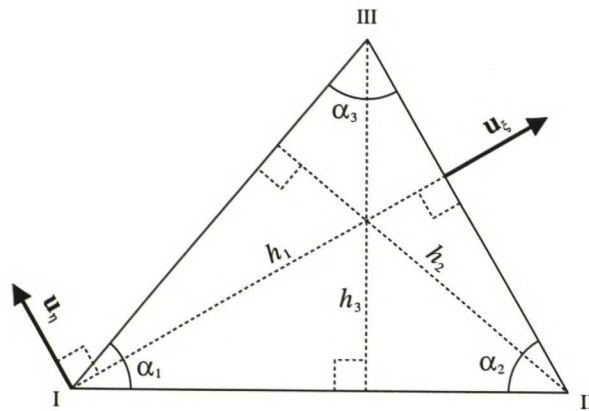
$$([A] - k_0^2 [B]) \{E\} = -k_0 \{C\}. \quad (62)$$

Denna kombinerings eller sammansättning går ut på att varje kant har ett globalt unikt nummer i och en väldefinierad riktning, och att det finns en mappning från elementens kantnummer till dessa globala nummer.

Randvillkoret $\mathbf{u}_n \times \mathbf{E} = 0$ på perfekta ledarytor uppfylls genom att *a priori* sätta $E_i = 0$ för alla kanter i som sammanfaller med dessa ledarytor. Ifrågakvarande okända E_i kan således elimineras ur ekvationssystemet, som på det här sättet blir något mindre.

Med den valda antennenmatningen blir excitationsvektorn C mycket enkel att beräkna:

$$C_i = j\eta_0 I d_i \quad (63)$$



Figur 16: Ett ξ, η -koordinatsystem för prism-elementets bastriangel (figur 13, samma nodnumrering)

för alla kanter i (globala kantnummer) som sammanfaller med matningsströmmen I . Resten av vektorn $\{C\} = 0$, och d_i är längden på kant i .

Matriserna $[A^e]$ och $[B^e]$ är svårare att beräkna. I [21, 2] finns visserligen explicita uttryck för hur integralerna i (58) och (59) kan beräknas analytiskt, men jag lyckades åtminstone inte få vettiga resultat genom att använda dem.

Genom att använda en koordinattransformation till ett lokalt ξ, η -koordinatsystem [2] (se figur 16)

$$L_1^e = 1 - \frac{1}{h_1^e} \xi \quad (64)$$

$$L_2^e = \frac{\cos \alpha_3^e}{h_2^e} \xi - \frac{\sin \alpha_3^e}{h_2^e} \eta \quad (65)$$

$$L_3^e = \frac{\cos \alpha_2^e}{h_3^e} \xi - \frac{\sin \alpha_2^e}{h_3^e} \eta \quad (66)$$

blir integrationsgränserna i ekvationerna (58) och (59)

$$z \in [0, c^e] \quad (67)$$

$$\xi \in [0, h_1^e] \quad (68)$$

$$\eta \in [-\xi \cot \alpha_2^e, \xi \cot \alpha_3^e] \quad (69)$$

och med lite hjälp av MAPLE [43] lyckades jag beräkna integralerna symboliskt. De resulterande uttrycken är alldeles för långa för att presenteras här, men den av MAPLE genererade FORTRAN-koden för $[A^e]$ och $[B^e]$ tycks ge korrekta resultat.

9 Lösning av ekvationssystemet

Som ett resultat av FEM-formuleringen ovan fås ett linjärt ekvationssystem

$$Ax = b, \quad (70)$$

där A är en känd symmetrisk matris, b en känd kolumnvektor och x är den sökta kolumnvektorn⁴. Antalet okända n är av storleksordningen 10^4 och alla storheter är komplexa. Lösningen av ekvationssystemet har i praktiken en mycket stor betydelse eftersom största delen av beräkningstiden går åt till just detta.

9.1 Glesa matriser och iterativa metoder

Lösningen av ekvationssystemet (70) medför två fundamentala problem i och med att antalet okända n är stort: för det första kan matrisen A lätt vara för stor för att lagras i centralminnet på en dator, och för det andra tar lösningen av ekvationssystemet för länge med någon enkel direkt metod. Med $n = 10^4$ blir matrisen A :s storlek $n^2 = 10^8$, vilket skulle kräva ungefär 1600 MB minne (16 bytes per komplext tal). Lösningstiden för direkta metoder är typiskt $O(n^3)$.

Orsaken till att det här överhuvudtaget lyckas är att koefficientmatrisen A är mycket gles, dvs. att de flesta elementen är noll. I detta fall är antalet element olika noll ungefär $n_{nz} = 22n \dots 23n$, vilket t.ex. för $n = 10^4$ endast är ungefär 0,23% av elementen i koefficientmatrisen. Att lagra alla nollor och ännu värre utföra en massa beräkningar med dem är givetvis inte speciellt meningsfullt, och ett antal olika sätt att lagra endast de element som är olika noll finns presenterade i [2, 44].

Jag har valt att använda en lagringsmetod som går under namnet *Compressed Row* [44] eller *Compressed Sparse Row* (CSR) [2], där en matris A av dimensionen $n \times n$ och n_{nz} element olika noll lagras som

$$a(1 \dots n_{nz}) \quad \text{de komplexa värdena} \quad (71)$$

$$j_a(1 \dots n_{nz}) \quad \text{kolumn-index} \quad (72)$$

$$i_a(1 \dots n + 1) \quad \text{rad-index.} \quad (73)$$

Rad-indexen i_a fungerar så att $i_a(m)$ är positionen i a och j_a där den m :e raden börjar och $i_a(n + 1) = n_{nz} + 1$ dvs. positionen där den icke existerande

⁴Notera att notationen här (sektion 9) avviker från övriga sektioner. Här betecknar stora bokstäver matriser, små bokstäver kolumnvektorer, grekiska bokstäver skälärer samt i, j, m och n heltal.

raden $n + 1$ skulle börja. Minnesåtgången med den här lagringsmetoden blir $20n_{nz} + 4n + 1$ (16 bytes per komplext tal och 4 byte per heltal), vilket t.ex. med $n = 10^4$ och $n_{nz} = 22,5n$ ger ungefär 4,5 MB.

Istället för att lösa ekvationssystemet (70) med någon direkt metod lönar det sig att använda en iterativ lösningsmetod. Typiska iterativa metoder så som konjugat gradient-metoden använder inte matrisen A direkt utan endast i form av matris-vektor produkten Ax , och i vissa fall $A^T x$ där A^T är A transponerad. En vanlig matris-vektor produkt $b = Ax$ där

$$b_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j \quad i \in [1, n] \quad (74)$$

är klart en $O(n^2)$ -operation, medan det för en CSR-matris är en $O(n_{nz})$ operation [44]

$$b_i = \sum_{j=i_a(i)}^{i_a(i+1)} a(j)x(j_a(i)) \quad i \in [1, n]. \quad (75)$$

Matris-vektor produkten är normalt den mest tidskrävande operationen per iteration, och förutsatt att antalet iterationer för att få en tillräckligt noggrann lösning inte är orimligt stort, är det utan vidare klart att en iterativ metod är attraktiv. Antalet iterationer som behövs beror på koefficientmatrisen A , och det är inte alltid självklart att någon viss iterativ metod skulle konvergera för varje koefficientmatris. I många fall är antalet iterationer emellertid $\ll n$. [44]

9.2 Konjugat gradient-metoden

Det finns en mängd olika iterativa metoder, och en hel del färdiga implementationer finns att tillgå t.ex. från netlib [45]. De flesta av de tillgängliga implementationerna är emellertid gjorda som FORTRAN-77 subrutiner och användningen av dessa verkar besvärlig, inte minst tack vare den omvända kommunikation som används för att användaren skall utföra matris-vektor multiplikationerna.

Istället för att använda någon färdig implementation valde jag att själv implementera en lösningsalgoritm på basen av de noggranna beskrivningarna i [44]. Efter en del försök och misstag kom jag fram till att konjugat gradient-metoden (algoritm 1) verkade lämplig. Den är den enklaste av de ickestationära metoder som beskrivs, och det att en del andra varianter kan väntas konvergera snabbare uppvägs åtminstone delvis av att mängden jobb per iteration är mindre.

Algoritim 1 Konjugat gradient-metoden med en förbehandlingsmatris M för att lösa x ur ekvationssystemet $Ax = y$. Förutom A , y och M antas också utgångsvärdet $x^{(0)}$, maximiantalet iterationer $maxit$ och konvergenskriteriet $stop_tol$ vara givna.

```

 $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ 
 $i = 0$ 
repeat
   $i = i + 1$ 
  lös  $z^{(i-1)}$  ur ekvationen  $Mz^{(i-1)} = r^{(i-1)}$ 
   $\rho_{i-1} = r^{(i-1)T} z^{(i-1)}$ 
  if  $i = 1$  then
     $p^{(1)} = z^{(0)}$ 
  else
     $\beta_{i-1} = \rho_{i-1} / \rho_{i-2}$ 
     $p^{(i)} = z^{(i-1)} + \beta_{i-1} p^{(i-1)}$ 
  end if
   $q^{(i)} = Ap^{(i)}$ 
   $\alpha_i = \rho_{i-1} / (p^{(i)T} q^{(i)})$ 
   $x^{(i)} = x^{(i-1)} + \alpha_i p^{(i)}$ 
   $r^{(i)} = r^{(i-1)} - \alpha_i q^{(i)}$ 
until  $i \geq maxit$  or  $\|r\| \leq stop\_tol \cdot (\|A\| \cdot \|x\| + \|b\|)$ 

```

Algoritim 2 Lösning av z ur ekvationen $Mz = r$ då $M = (D+L)D^{-1}(D+U)$

```

for  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  do
   $x_i = D_{ii}^{-1}(r_i - \sum_{j < i} L_{ij}x_j)$ 
end for
for  $i = n, n-1, n-2, \dots, 1$  do
   $z_i = x_i - D_{ii}^{-1} \sum_{j > i} U_{ij}z_j$ 
end for

```

Konjugat gradient-metoden är egentligen avsedd för symmetriska positiv-definita koefficientmatriser A , och för dessa kan metodens konvergens garanteras ifall man använder exakt aritmetik. Här är koefficientmatrisen emellertid komplex och symmetrisk, så konjugat gradient-metoden kan användas, men det finns ingen garanti för att den konvergerar. [44]

Konvergenskriteriet som använts i algoritm 1 är helt enkelt det rekommenderade i [44]. Matris- och vektor-normerna är maximi-normerna

$$\|A\|_{\infty} = \max_j \sum_k |A_{jk}| \quad (76)$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_j |x_j|, \quad (77)$$

medan *maxit* och *stop_tol* i algoritm 1 är valda så att resultaten empiriskt verkar bli tillräckligt bra.

För att förbättra det ursprungliga ekvationssystemets (70) konvergens kan det transformeras till ett ekvivalent ekvationssystem

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \quad (78)$$

med en lämplig förbehandlingsmatris M . Ifall denna matris är väl vald kan antalet iterationer som behövs minska drastiskt, men att konstruera denna matris och att använda den vid varje iteration kan förstås kräva en massa extra beräkningar. [44]

Jag valde att använda en så kallad *Symmetric Successive Overrelaxation* eller SSOR-förbehandlingsmatris [44]. Ifall den ursprungliga koefficientmatrisen spjälks upp i sin diagonal, nedre och övre triangulära del

$$A = D + L + U \quad \text{där } U = L^T, \quad (79)$$

kan SSOR-matrisen utan extra beräkningar skrivas som

$$M = (D + L)D^{-1}(D + U). \quad (80)$$

I algoritm 1 används förbehandlingsmatrisen inte direkt enligt (78), utan det som behövs är lösningen av z ur en ekvation $Mz = r$, vilket är enkelt då M är färdigt faktoriserad (algoritm 2).

10 Fjärrfält och strålningsdiagram

Lösningen av antennproblemet ger som resultat elfältet nära antennen, men för att beskriva antennens strålningsegenskaper måste dess fjärrfält beräknas. För att göra detta används här Huyghens princip och spegelbildsteorin på det sätt som beskrivs i boken [46] för aperturantenner.

I figur 17 visas steg för steg hur det ursprungliga problemet kan transformeras till ett mycket enklare ekvivalent problem. Det ursprungliga problemet består av godtyckliga material och källor nedsänkta i ett oändligt ledande plan. Denna metod kan appliceras på vilka antennstrukturer som helst förutsatt att det finns en väldefinierad apertur vars tangentiella fält är kända.

Första steget är att med hjälp av Huyghens princip ersätta området $z < 0$ med vakuum och ekvivalenta ytströmmar på ytan $z = 0$. De ekvivalenta ytströmmarna fås med hjälp av aperturfälten \mathbf{E}_a och \mathbf{H}_a :

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{u}_z \times \mathbf{H}_a \quad (81)$$

$$\mathbf{J}_{ms} = -\mathbf{u}_z \times \mathbf{E}_a \quad (82)$$

Endera ytströmmen kan elimineras genom att fylla området $z < 0$ med antingen en perfekt elektrisk- eller magnetisk ledare. Här lönar det sig att välja en elektriskt ledare för att få ett oändligt plan och en magnetisk ytström \mathbf{J}_{ms} som är $\neq 0$ bara i den ursprungliga aperturen.

Med hjälp av spegelbildsteorin kan det ledande planet slutligen elimineras och istället för det ursprungliga problemet har vi en homogen rymd med ytströmmen $2\mathbf{J}_{ms}$ i den ursprungliga aperturen.

Fjärrfältet från det sistnämnda problemet kan beräknas relativt enkelt och enligt boken [46] fås följande uttryck för fjärrfältet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{u}_r \times [\mathbf{u}_z \times \mathbf{f}(\mathbf{u}_r)] \quad (83)$$

där den så kallade strålningsfunktionen $\mathbf{f}(\mathbf{u}_r)$ fås med hjälp av $\mathbf{F}(\mathbf{K})$ som är aperturfältet \mathbf{E}_a :s tvådimensionella Fourier-transformation:

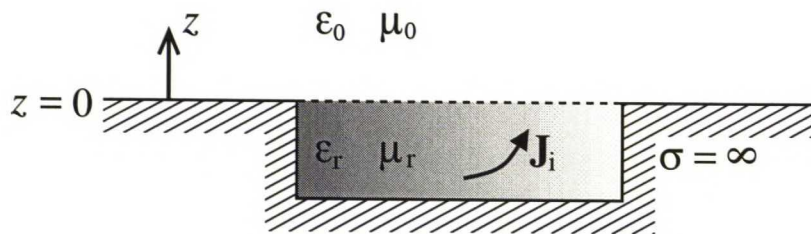
$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_r) = \mathbf{F}(\mathbf{K}) = \mathbf{F}(k_x \mathbf{u}_x + k_y \mathbf{u}_y) \quad (84)$$

$$k_x = k \sin(\theta) \cos(\varphi)$$

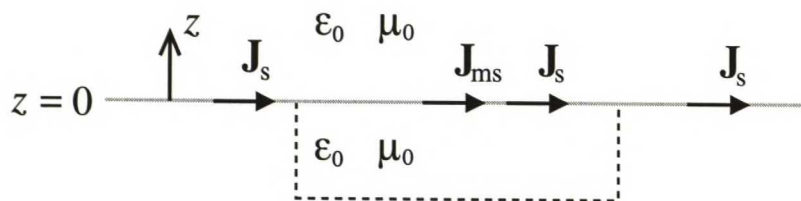
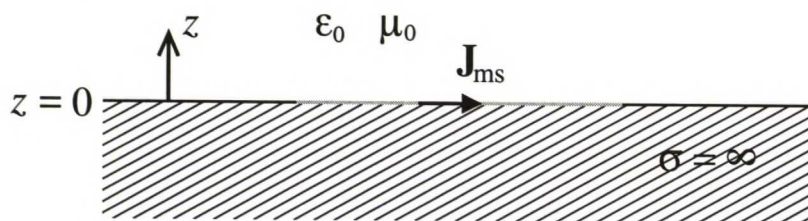
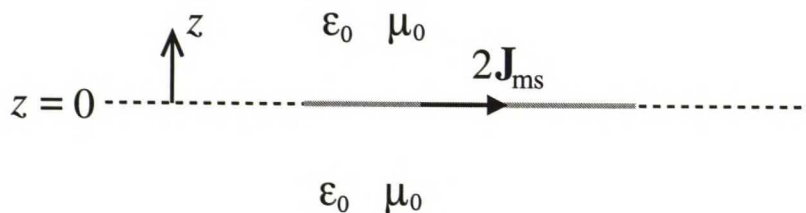
$$k_y = k \sin(\theta) \sin(\varphi)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{K}) = \iint_S \mathbf{E}_a(\boldsymbol{\rho}) e^{j\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\rho}} dS \quad (85)$$

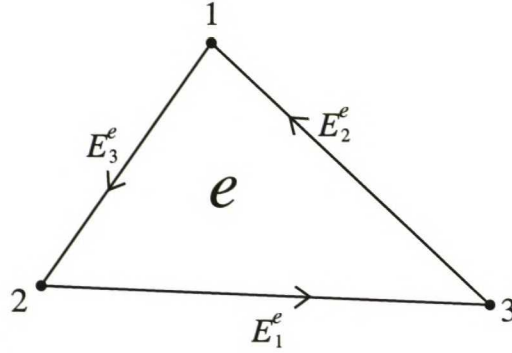
$$\boldsymbol{\rho} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y$$



(a) Det ursprungliga problemet

(b) Ekvivalenta ytströmmar \mathbf{J}_s och \mathbf{J}_{ms} enligt Huyghens princip(c) Den ena ytströmmen \mathbf{J}_s elimineras med hjälp av en idealledare(d) Slutligen får vi med hjälp av spegelbildsteorin en homogen rymd med $2\mathbf{J}_{ms}$ som ekvivalent källa

Figur 17: Huyghens princip och spegelbildsteorin tillämpade på en apertur i ett oändligt ledande plan. Samtliga konfigurationer ger samma fält \mathbf{E} och \mathbf{H} i området $z > 0$



Figur 18: Apertur-triangeln e . Triangelns geometri beskrivs av nodernas koordinater (x_i, y_i) . E_i^e är elfältets tangentiella komponent vid respektive kant.

För en enskild triangel e (se figur 18) kan aperturfältet \mathbf{E}_a^e , eller rättare sagt dess tangentiella komponent, uttryckas som

$$\mathbf{E}_a^e(x, y) = [-ay + b]\mathbf{u}_x + [ax + c]\mathbf{u}_y \quad (86)$$

där a , b och c är komplexa koefficienter som beror på triangelns form och storlek samt på de lösta elfältskomponenterna E_1^e , E_2^e och E_3^e . Strålningsfunktionen $\mathbf{f}^e(\mathbf{u}_r)$ blir därmed:

$$\mathbf{f}^e(\mathbf{u}_r) = f_x^e \mathbf{u}_x + f_y^e \mathbf{u}_y \quad (87)$$

$$f_x^e = \iint_{S^e} (-ay + b) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (88)$$

$$f_y^e = \iint_{S^e} (ax + c) e^{j(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (89)$$

De enskilda apertur-trianglarnas fjärrfält $\mathbf{E}^e(\mathbf{r})$ blir således

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^e(\mathbf{r}) = -2jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \Big(& -[f_x^e \cos(\varphi) + f_y^e \sin(\varphi)]\mathbf{u}_\theta \\ & + [f_x^e \cos(\theta) \sin(\varphi) - f_y^e \cos(\theta) \cos(\varphi)]\mathbf{u}_\varphi \Big) \end{aligned} \quad (90)$$

och det totala fjärrfältet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ fås tack vare superpositionsprincipen genom en enkel summering:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_e \mathbf{E}^e(\mathbf{r}). \quad (91)$$

Det enda problemet med formlerna ovan är beräkningen av strålningsfunktionen $\mathbf{f}^e(\mathbf{u}_r)$. Integralerna i formlerna (88) och (89) är nämligen inte triviala att lösa eftersom integrationsområdet S^e är en triangel vars form är godtycklig.

Med hjälp av en koordinattransformation till ett lokalt ξ, η -koordinatsystem (som i figur 16) kan integrationsgränserna entydigt beskrivas på motsvarande sätt som ovan. Integralerna ser dess värre mycket mer komplicerade ut efter denna transformation, och också ifall de kanske skulle gå att beräkna symboliskt blir det knappast några korta lätthanterliga uttryck.

Eftersom triangelarna är små jämfört med vågländen, kommer uttrycket $e^{j(k_x x + k_y y)}$ i integralerna att variera måttligt, och man kunde tänka sig att approximeras dess värde med värdet i mitten av triangeln. Denna approximation verkar dock inte riktigt ge tillfredsställande resultat, så jag valde istället att integrera numeriskt.

Numerisk integrering över en triangel med hjälp av Gauss kvadratur innebär att man approximerar integralen med en vägd summa av integrandens värden på olika punkter i triangeln:

$$\iint_A f dA \approx A \sum_{i=1}^N w_i f(L_1^i, L_2^i, L_3^i) \quad (92)$$

Triangelns area är A , N är antalet sampel och w_i är respektive vikt för de olika punkterna som anges med areakoordinaterna L_1^i , L_2^i och L_3^i . Lämpliga vikter och punkter finns t.ex. i artikeln [47]⁵.

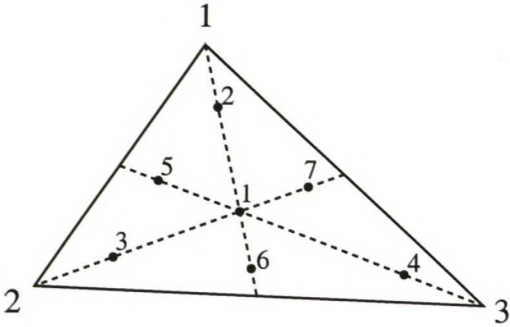
Jag har valt att använda en kvadraturformel med sju sampel, som uppges vara exakt för integrander som är polynom med graden ≤ 5 enligt artikeln [47]. Detta borde alltså i noggrannhet motsvara att uttrycket $e^{j(k_x x + k_y y)}$ i integralerna skulle approximeras med ett fjärdegrads-polynom.

Sampelkoordinaterna och -vikterna finns i tabell 1 och sampelpunkternas placering i en triangel åskådliggörs i figur 19.

⁵Boken [1] har också en del av kvadraturformlerna, men triangelns area tycks bortglömd och fyrapunktsformeln har annorlunda sampelpunkter men samma vikter.

i	w_i	L_1^i	L_2^i	L_3^i
1	0,22500 00000 00000	0,33333 33333 33333	0,33333 33333 33333	0,33333 33333 33333
2	0,12593 91805 44827	0,79742 69853 53087	0,10128 65073 23456	0,10128 65073 23456
3	0,12593 91805 44827	0,10128 65073 23456	0,79742 69853 53087	0,10128 65073 23456
4	0,12593 91805 44827	0,10128 65073 23456	0,10128 65073 23456	0,79742 69853 53087
5	0,13239 41527 88506	0,47014 20641 05115	0,47014 20641 05115	0,05971 58717 89770
6	0,13239 41527 88506	0,05971 58717 89770	0,47014 20641 05115	0,47014 20641 05115
7	0,13239 41527 88506	0,47014 20641 05115	0,05971 58717 89770	0,47014 20641 05115

Tabell 1: Sampelkoordinater och -vikter för Gauss kvadratur med sju sampel för en triangel



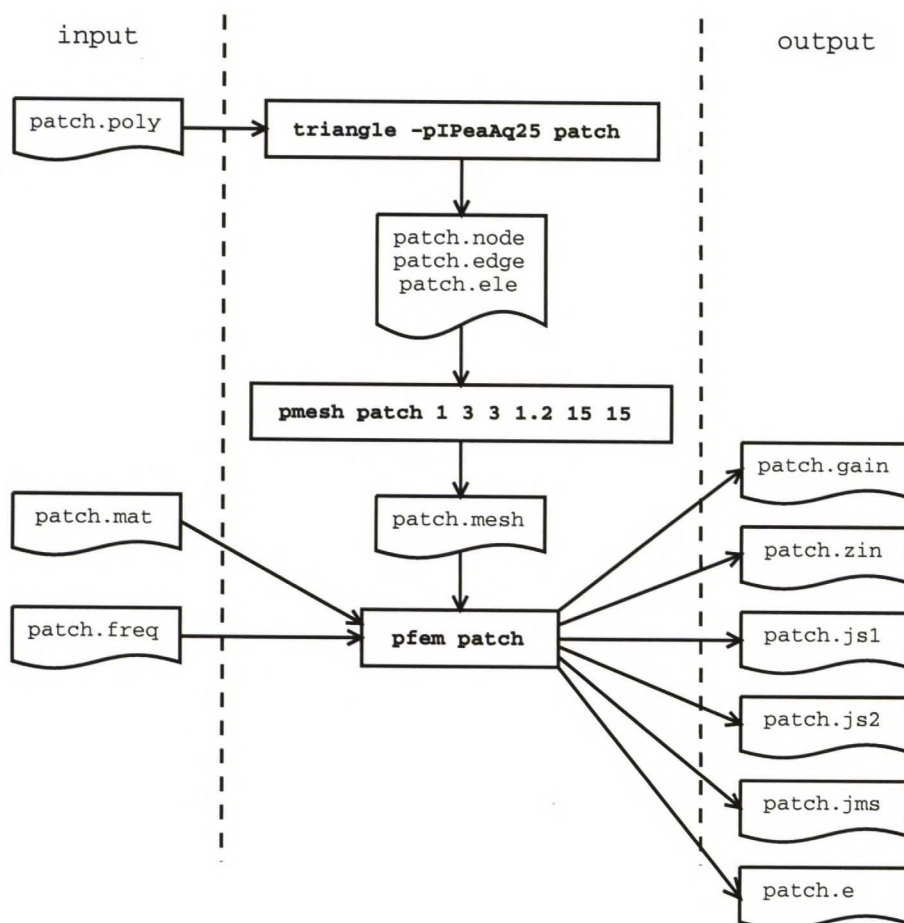
Figur 19: De sju sampelpunkternas placering i en triangel

11 Impedans

Att beräkna antennenimpedansen då väl elfältskomponenterna E_i är lösta är med den valda antennenmatningen i det närmaste trivialt. Matningsströmmen I är känd (godtyckligt vald) och att beräkna spänningen mellan matningspunkten och jordplanet är enkelt. Impedansen blir

$$Z_{in} = \frac{\sum_i E_i d_i}{I}, \quad (93)$$

där d_i är längden på kant i . Summeringen sker över alla kanter i som sammanfaller med koaxialkabelns inre ledare. Kanternas riktning måste förstås också beaktas.



Figur 20: Använda program och deras inbördes kommunikation

12 Applikation

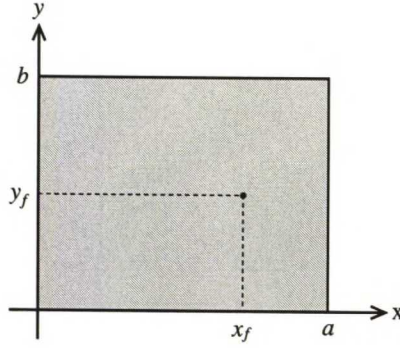
Som en väsentlig del av detta diplomarbete har jag utvecklat ett FEM-program som främst lämpar sig för beräkningen av antennimpedans och strålningsdiagram för mikrostripantenn. Övriga planara antenner kunde också simuleras, men en del vidareutveckling av nätgenereringen skulle behövas för att tillåta godtyckliga planara strukturer. Beräkningen av strålningsdiagram blir också betydligt svårare ifall antennen inte är nedsänkt i ett oändligt perfekt ledande plan. Slutligen medför antagandet att substratet är tunt också vissa begränsningar.

Den utvecklade applikationen består egentligen av flera skilda program så att nätgenereringen är en skild förberedande fas enligt flödesskemat i figur 20. För nätgenereringen används först Shewchucks TRIANGLE [40] för att

diskretisera xy -planet i ett antal trianglar, och på basen av detta fås det slutliga prismbaserade nätet med hjälp av C-programmet PMESH (Prism-Mesh). Själva FEM-simuleringen körs slutligen med Fortran90-programmet PFEM (Prism-FEM). De två sistnämnda programmen har jag själv utvecklat.

Något direkt användargränssnitt har inte utvecklats, utan all kommunikation med programmen och mellan programmen sköts med textfiler. Programmen tar också en del argument från kommandoraden. Ett typiskt exempel på dessa argument finns i figur 20, där också de använda textfilerna (i detta exempel patch.*) finns med.

Filerna patch.poly, patch.mat och patch.freq används i nämnda figur för att beskriva antenngeometrin, materialparametrarna respektive frekvensområdet. Resultatfilerna patch.gain och patch.zin innehåller det normaliserade strålningsdiagrammet respektive antennimpedansen; den senare som en funktion av frekvensen. Slutligen innehåller filen patch.e elfältet under patchen, patch.jms den ekvivalenta magnetiska ytströmmen, medan patch.js1 och patch.js2 innehåller de elektriska ytströmmarna ovanpå respektive under patchen.



Figur 21: Geometrin för en rektangulär mikrostripantenn

13 Referensdata

För att verifiera de utvecklade programmen har jag primärt valt att studera två mikrostrip-antenn: dels en enkel kvadratisk och dels en elektriskt liten rund antenn. För rektangulära mikrostripantenn finns en del approximativa formler att tillgå, och experimentella resultat för vardera antenngemetrin finns publicerade i [48, 49]. Därtill har jag haft möjlighet att använda två andra FEM-program som jämförelse.

13.1 Approximativa formler

För rektangulära mikrostripantenn finns det en del approximativa formler att tillgå. Antennens geometri finns i figur 21, där (x_f, y_f) är matningspunkten och antennens resonansform antas vara $(1, 0)$, dvs. en halv våg i x -riktningen och konstant i y -riktningen. Substratets relativa permittivitet är ϵ_r och dess tjocklek är h .

I boken [50] hittas en approximativ formel som för denna resonansform kan skrivas som

$$f_0 = \frac{c_0}{2a} \sqrt{\frac{\epsilon_r}{\epsilon_e(a)\epsilon_e(b)}} \frac{1}{(1 + \Delta)} \quad (94)$$

där Δ är den effektiva längdökningen

$$\Delta = \frac{h}{a} \left[0,882 + \frac{0,164(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r^2} + \frac{\epsilon_r + 1}{\pi \epsilon_r} \left(0,758 + \ln \left(\frac{a}{h} + 1,88 \right) \right) \right], \quad (95)$$

och $\epsilon_e(u)$ är de effektiva relativa permittiviteterna

$$\epsilon_e(u) = \frac{\epsilon_r + 1}{2} + \frac{\epsilon_r - 1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 10h/u}} \quad u = a, b. \quad (96)$$

Denna formel som baserar sig på den så kallade resonatormodellen uppges ge fel på mindre än 3% jämfört med experimentella resultat [50].

Approximativa formler för antennstrålningen finns också i boken [50]. I detta fall blir fjärrfältet

$$E_\theta(\varphi = 90^\circ) = 0 \quad (97)$$

$$E_\varphi(\varphi = 90^\circ) = -E_0 \exp\left(j \frac{k_0 b}{2} \sin \theta\right) \cos \theta \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 b}{2} \sin \theta\right) \quad (98)$$

$$E_\theta(\varphi = 0^\circ) = E_0 \exp\left(j \frac{k_0 a}{2} \sin \theta\right) \cos\left(\frac{k_0 a}{2} \sin \theta\right) \quad (99)$$

$$E_\varphi(\varphi = 0^\circ) = 0, \quad (100)$$

i huvudplanen xz och yz . E_0 är en komplex storhet som beror på avståndet och matningen men inte på riktningen, k_0 är vågtalet i vakuum medan θ och φ är de vanliga sfäriska koordinaterna.

Beräkningen av antennenimpedansen som en funktion av frekvensen är en mer invecklad procedur. Följande approximativa formel härstammar från en artikel av Richards m.fl. [51]:

$$Z_{in} = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{j\omega C_{mn} - j\frac{1}{\omega L_{mn}} + G_{mn}} \quad (101)$$

$$C_{mn} = 1/\alpha_{mn} \quad L_{mn} = \alpha_{mn}/\omega_{mn}^2 \quad G_{mn} = \omega \delta_{eff}/\alpha_{mn}$$

$$\alpha_{mn} = \frac{\mu_0 h c_0^2}{\epsilon_r} \phi_{mn}^2(x_f, y_f) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{m\pi d}{2a}\right)$$

$$\omega_{mn} = c_0 k_{mn}/\sqrt{\epsilon_r} \quad \omega = 2\pi f \quad \delta_{eff} \approx 1/Q_0,$$

där formfunktionerna $\phi_{mn}(x, y)$ för en rektangulär mikrostripantenn (se figur 21) är

$$\phi_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{\epsilon_m \epsilon_n}{ab}} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (102)$$

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m \neq 0 \end{cases} \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2, & n \neq 0, \end{cases}$$

och vågtalen k_{mn} är

$$k_{mn} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}. \quad (103)$$

Vidare är d antennenmatningens effektiva bredd, vilket i praktiken är ungefär fem gånger koaxialkabelns innerdiameter [51], medan δ_{eff} är den effektiva förlusttangenta som innefattar strålnings-, ledar- och dielektriska förluster. Resonansfrekvenserna kan korrigeras på motsvarande sätt som i (94), genom att ω_{mn} ovan ersätts med

$$\omega'_{mn} = \omega_{mn} \frac{\epsilon_r}{\sqrt{\epsilon_e(a)\epsilon_e(b)}} \frac{1}{(1 + \Delta)}. \quad (104)$$

Resonansfrekvensens exakthet beror främst på hur exakt denna korrigering är, medan impedansnivån främst beror på hur exakt Q-värdet Q_0 kan beräknas eller approximeras vid den aktuella resonansfrekvensen.

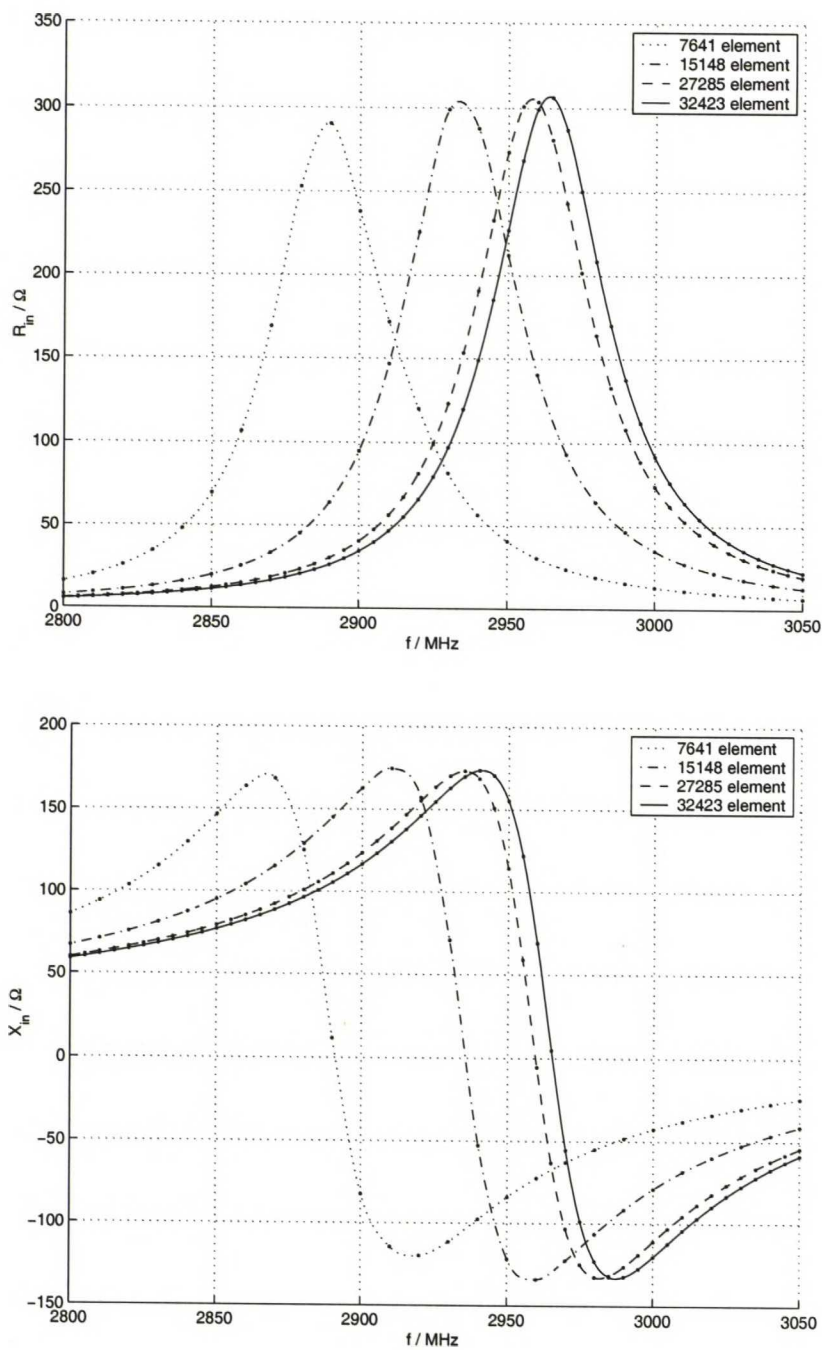
13.2 HFSS-simuleringar

HFSS [52] är ett kommersiellt simuleringsprogram som baserar sig på finita elementmetoden och använder tetraeder-kantelement och en adaptiv nätgenerering.

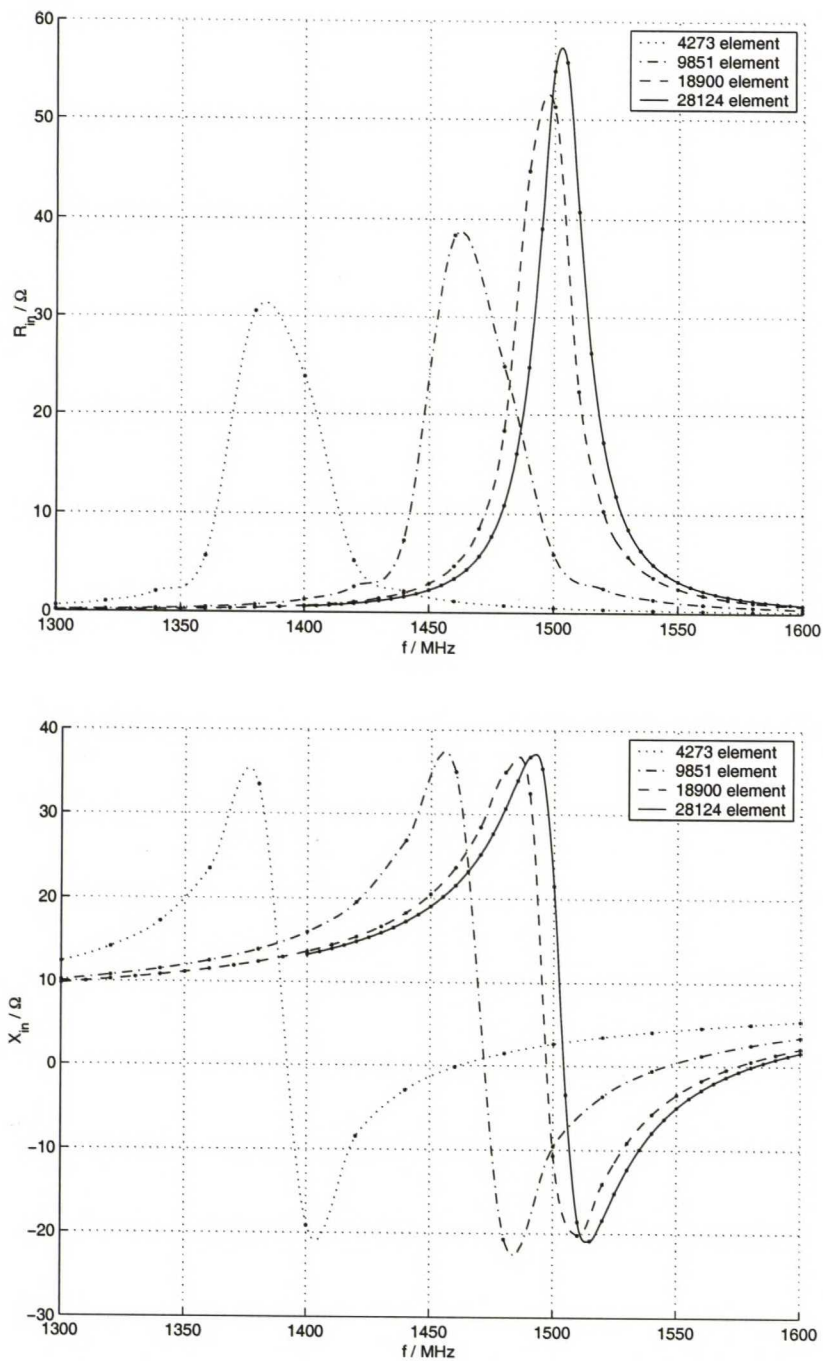
I vardera simuleringen avslutades beräkningsvolymen med ett strålningsrandvillkor på $0,3 \lambda$:s avstånd. För den kvadratiska antennen användes en tunn fyrkantig koaxialkabel med impedansen $Z_0 = 45,6 \Omega$. För den runda antennen approximerades själva antennen med en 36-hörning, kortslutningen med en 12-hörning och koaxialkabelmatningen med en 6-hörning.

Den adaptiva nätgenereringen utnyttjades så att antalet element ökade med 20 % för varje steg. De adaptiva förbättringsstegen görs alltid för någon viss specificerad frekvens, och denna frekvens uppdaterades med några steg mellanrum så att den följde resonansfrekvensens utveckling. I praktiken måste den adaptiva nätförbättringen avbrytas då minnesresurserna tog slut och beräkningstiderna blev oskäligt långa.

Figurerna 22 och 23 visar hur antennenimpedansen ändras med den adaptiva nätförbättringen för de aktuella antennerna.



Figur 22: Antennimpedansens utveckling med HFSS' adaptiva nätförbättring för den kvadratiske mikrostripantennen.



Figur 23: Antennimpedansens utveckling med HFSS' adaptiva nätförbättring för den lilla runda mikrostripantennen.

13.3 LM_BRICK-simuleringar

LM_BRICK [27] är ett FEM-program som använder sig av den hybrida metod som går under benämningen *Finite Element-Boundary Integral* (FE-BI).

Geometrin är begränsad till en eller flera substrat nedsänkta i ett oändligt ledande plan. Vidare används jämnstora rätblock som kantelement, så antenngeometrierna som kan analyseras är ganska begränsade.

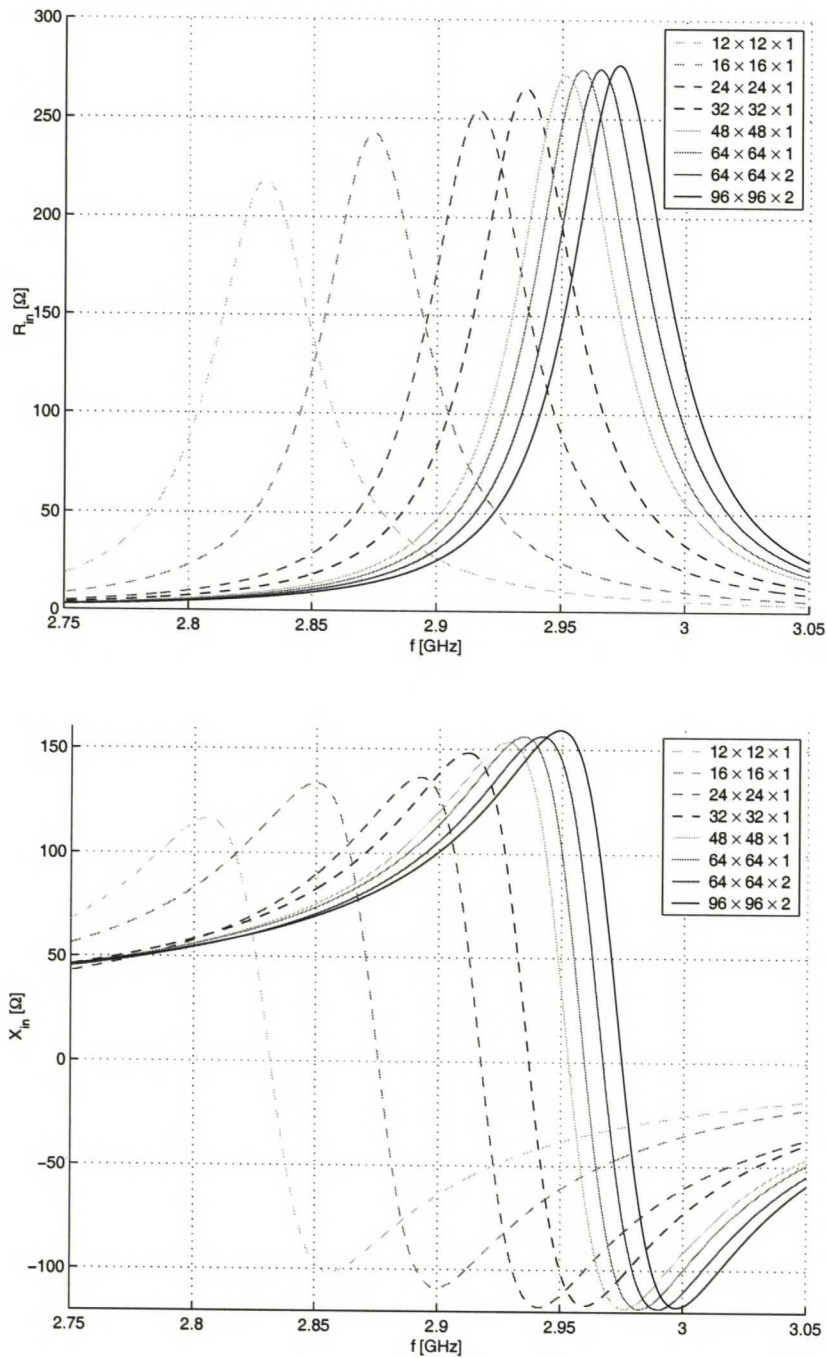
Effektiviteten i formuleringen bygger på att endast substratet diskretiseras och att ett exakt randvillkor för aperturen formuleras med hjälp av Greens funktion för ett oändligt ledande plan. Vidare kan ekvationssystemet lösas mycket effektivt då en jämn diskretisering används. [2]

Antennimpedansen för den kvadratiska mikrostripantennen med olika tät diskretisering finns i figur 24. Diskretiseringen, som också finns presenterad i tabell 2, är vald så att antalet element ungefär fördubblas vid varje steg. Det visade sig att det lönar sig att sträva efter möjligast kubformade element: så länge $\Delta x, \Delta y$ är klart större än Δz ändras inte lösningen märkbart ifall man halverar Δz , med då $\Delta x, \Delta y < \Delta z$ ändrar lösningen mer ifall man fördubblar antalet element i z -led än ifall man gör det i xy -planet.

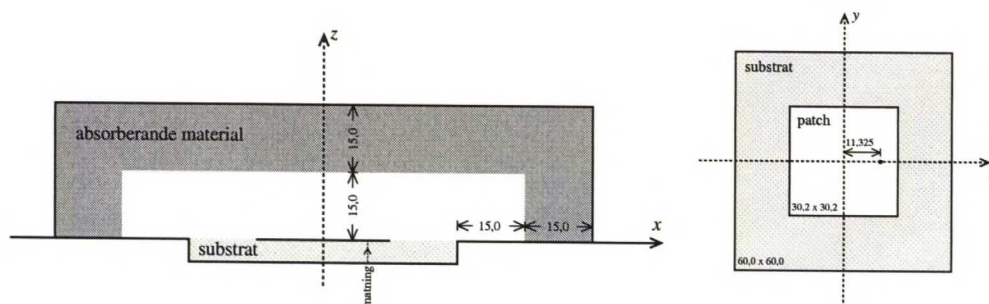
Den grövsta använda diskretiseringen motsvarar ungefär $1/12$ av den aktuella våglängden i substratet medan den finaste motsvarar ungefär $1/100$. Trots den fina diskretiseringen verkar resonansfrekvensen inte stabilisera sig, och en ännu finare diskretisering skulle ge orimliga simuleringstider. Däremot är det värt att notera att samtliga diskretiseringar ger exakt samma normaliserade strålningsdiagram, vilket tydligen är tack vare det exakta randvillkor som används.

	element	$\Delta x, \Delta y$	Δz
$12 \times 12 \times 1$	144	5,03 mm	1,2 mm
$16 \times 16 \times 1$	256	3,77 mm	1,2 mm
$24 \times 24 \times 1$	576	2,52 mm	1,2 mm
$32 \times 32 \times 1$	1024	1,89 mm	1,2 mm
$48 \times 48 \times 1$	2304	1,26 mm	1,2 mm
$64 \times 64 \times 1$	4096	0,94 mm	1,2 mm
$64 \times 64 \times 2$	8192	0,94 mm	0,6 mm
$96 \times 96 \times 2$	18432	0,63 mm	0,6 mm

Tabell 2: Antalet element och elementens storlek för de olika diskretiseringarna för den kvadratiska antennen och LM_BRICK



Figur 24: Antennimpedansen med LM_BRICK och olika diskretisering för den kvadratiske mikrostrippantennen



Figur 25: Den kvadratiska mikrostripantennens geometri, och det absorberande materialets placering. Substratet är 1,2 mm tjockt med $\epsilon_r = 2,55$. Alla mått i figuren är i mm.

14 Resultat för den kvadratiska mikrostripantennen

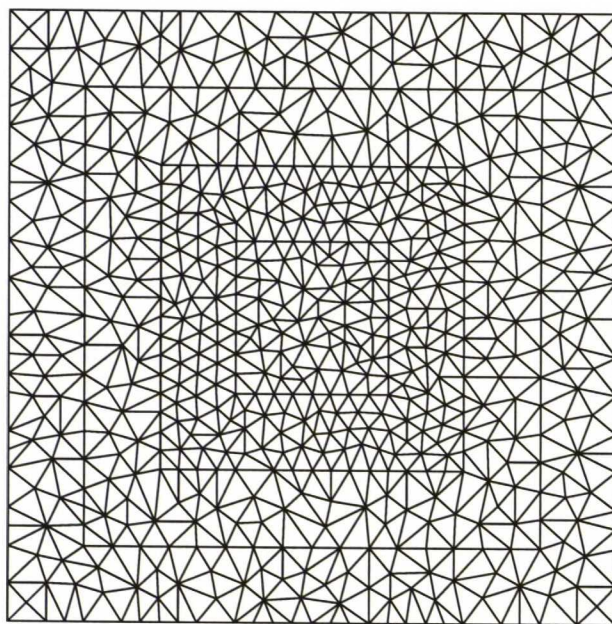
Den första antennen som här behandlas är en kvadratisk mikrostripantenn med storleken $30,2 \times 30,2$ mm. Tvärsnitt av antennen i xz - och xy -planen finns i figur 25, och en tredimensionell skiss utan det absorberande materialet finns också i figur 2.

Antennens substrat är 60×60 mm stort och 1,2 mm tjockt. Det är ned-sänkt i ett oändligt ledande plan, har den relativa permittiviteten $\epsilon_r = 2,55$ och antas vara förlustfritt. Substratets storlek är valt i avsikten att det skall vara så stort att resultaten är jämförbara med modeller som baserar sig på ett oändligt stort substrat⁶.

Det absorberande materialet är 15 mm tjockt och den relativa permittiviteten och permeabiliteten är $\epsilon_r = \mu_r = 1 - j2,7$. Materialet är placerat på 15 mm:s avstånd, vilket vid 3 GHz motsvarar $0,15 \lambda$.

Antennmatningen är 11,325 mm från antennens mittpunkt i x -riktningen. Antennen är således fullständigt symmetrisk med avseende på planet $y = 0$, men detta är inte utnyttjat för att halvera beräkningsvolymen. Detta är ett medvetet val för att kontrollera huruvida ett något asymmetriskt nät lyckas förstöra symmetrin och ge upphov till ofysikaliska lösningar.

⁶Åtminstone med LM_BRICK ändrar varken strålningen eller impedansen nämnvärt ifall man förstörar substratet med 50 % i x - och y -riktningen.



Figur 26: Diskretiseringen i xy -planet (1214 trianglar)

14.1 Olika nät

Som ett första försök valde jag att variera diskretiseringen och se hur det påverkar antennparametrarna och simuleringstiderna. De olika näten och respektive simuleringstider finns sammanfattade i tabell 3. Här har jag försökt hålla diskretiseringen någorlunda jämn, dock så att den är något tätare vid antennen än i det absorberande materialet. Det glesaste nätet finns i figur 26, medan de övriga är liknande men jämnt tätare.

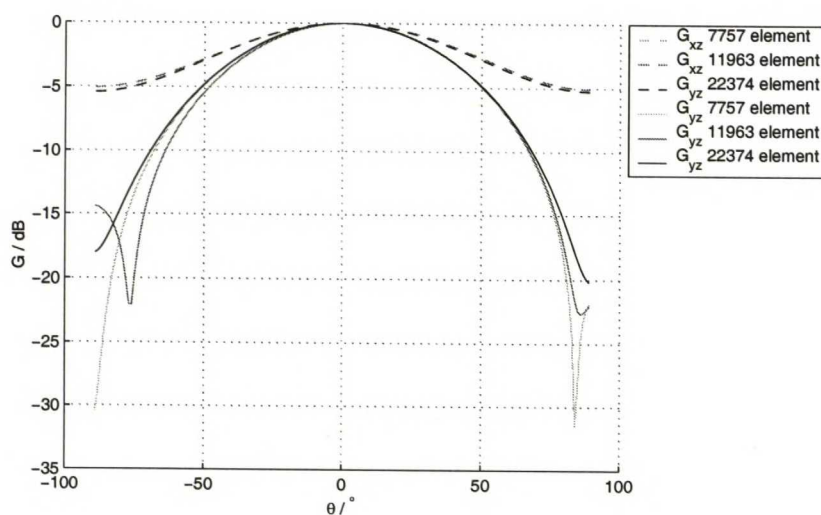
Tyvärr blir simuleringstiderna snabbt orimligt långa: med 22347 element tog det över tre timmar för hela frekvenssvepet, så något väsentligt finare nät kommer tyvärr inte på fråga.

Normaliserade strålningsdiagram finns i figur 27. Variationerna är ganska måttliga då $|\theta| < 60^\circ$, och strålningsdiagrammen ser ungefär ut som väntat. En viss asymmetri förekommer för de glesare näten, men den minskar i och med att diskretiseringen blir tätare.

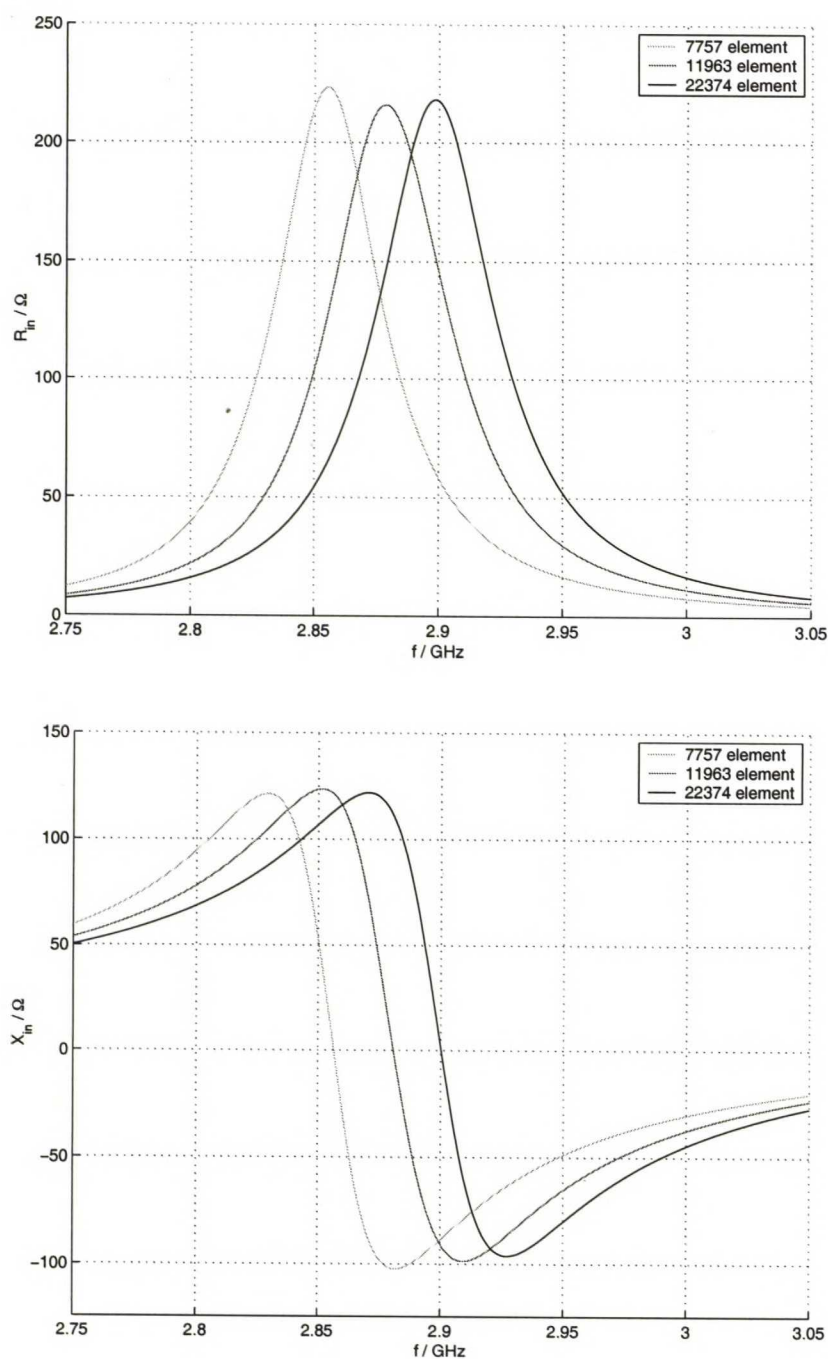
Resonansfrekvensen ändrar däremot ganska markant i och med att diskretiseringen blir finare, vilket framgår av antennimpedansen i figur 28. Tyvärr verkar resonansfrekvensen inte stabilisera sig med ett rimligt antal element – åtminstone då nätet görs tätare på detta sätt.

	trianglar	lager	element	okända	tid
1	1214	1 + 3 + 3	7757	12938	13,0 s
2	1854	1 + 3 + 3	11963	20074	37,3 s
3	2630	1 + 5 + 3	22347	39254	187,0 s

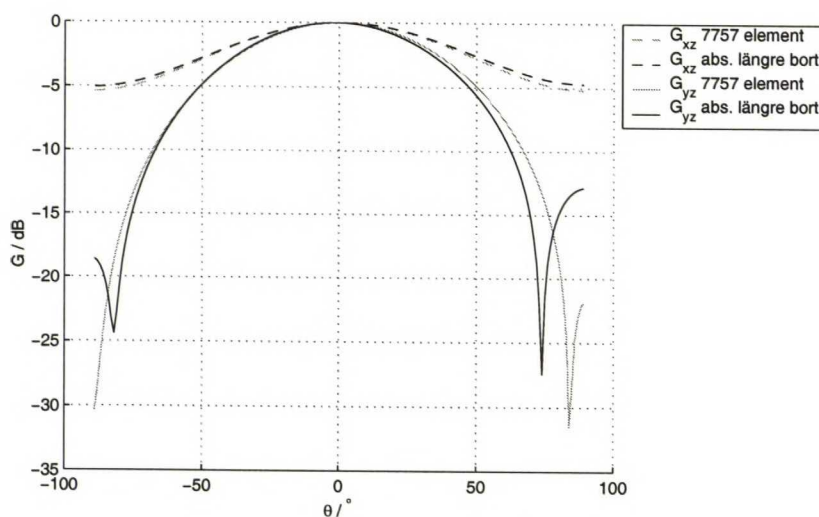
Tabell 3: De olika näten och resulterande simuleringstider. Kolumnen *lager* är antalet element i z -led i substratet, ovanför antennen respektive i det absorberande materialet. Tiderna är per frekvens i medeltal.



Figur 27: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den kvadratiske mikrostripantennen. Olika tät, nästan jämn diskretisering.



Figur 28: Antennimpedansen för den kvadratiske mikrostripantennen. Olika tät, nästan jämn diskretisering.



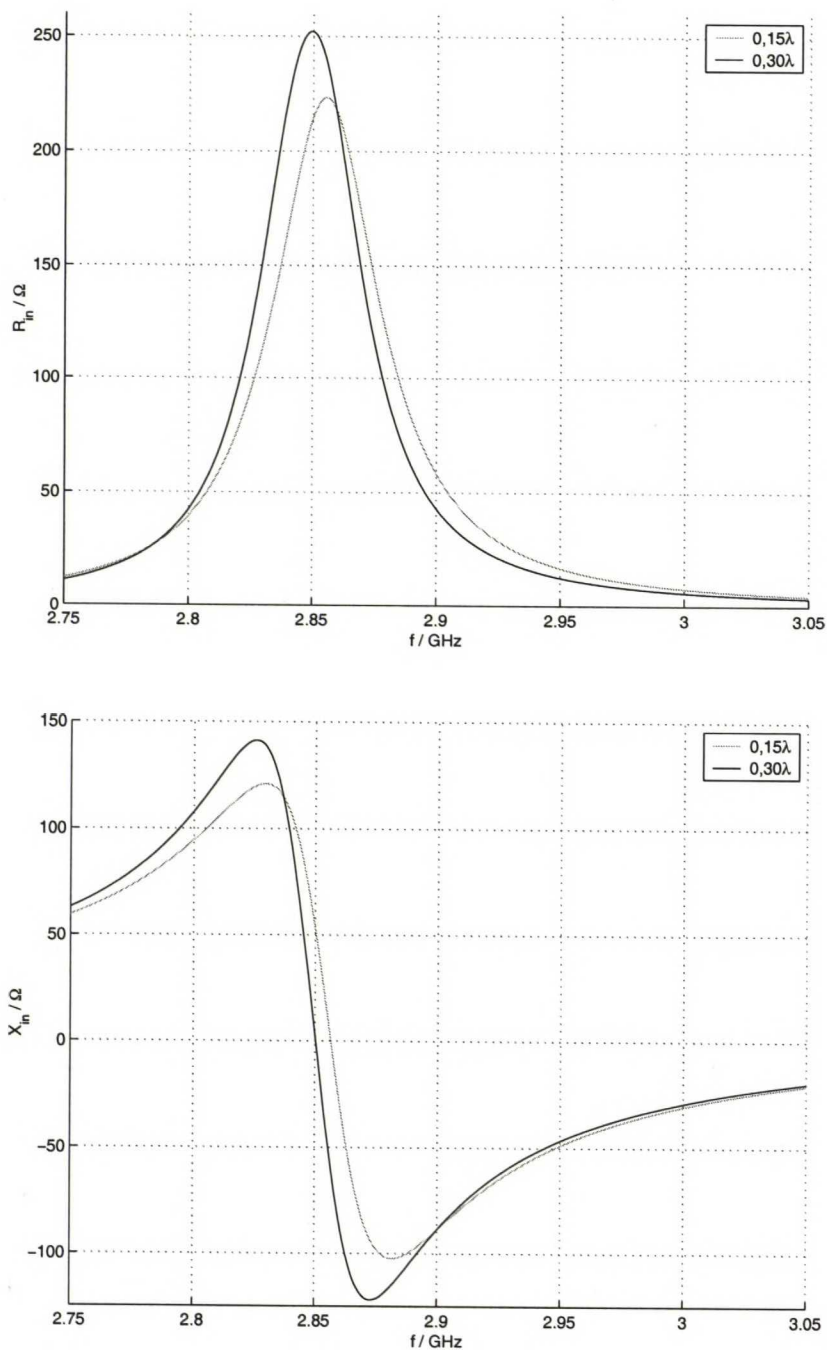
Figur 29: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den kvadratiske mikrostripanntennen. Det absorberande materialet är placerat på avståndet 15 mm respektive 30 mm ($0,15 \lambda$ respektive $0,30 \lambda$ vid 3 GHz).

14.2 Det absorberande materialets inverkan

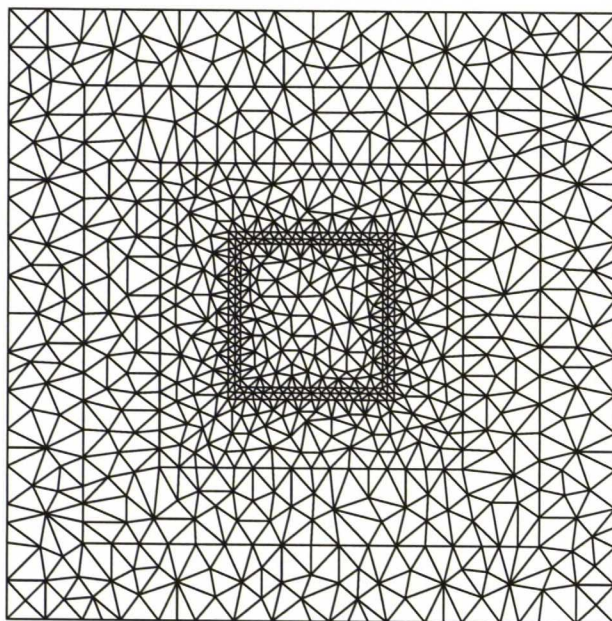
För att verifiera att det absorberande materialet är tillräckligt reflektionsfritt har jag här flyttat materialet längre bort från antennen. Geometrin är i övrigt exakt den samma, men avståndet till det absorberande materialet är fördubblat till 30 mm. Diskretiseringen är ungefär lika tät som med 7757 element ovan (tabell 3, nät nummer 1).

Såväl strålningsdiagrammet (figur 29), som antennimpedansen (figur 30) ändrar något då avståndet till det absorberande materialet fördubblas. Då man jämför figurerna 28 och 30 kan man emellertid konstatera att olika diskretisering ger betydligt större variationer.

Åtminstone för just det här antennproblemet verkar den valda absorberarlösningen således fungera tillfredsställande.



Figur 30: Antennimpedansen för den kvadratiske mikrostripanntennen. Det absorberande materialet är placerat på avståndet 15 mm respektive 30 mm ($0,15\lambda$ respektive $0,30\lambda$ vid 3 GHz).



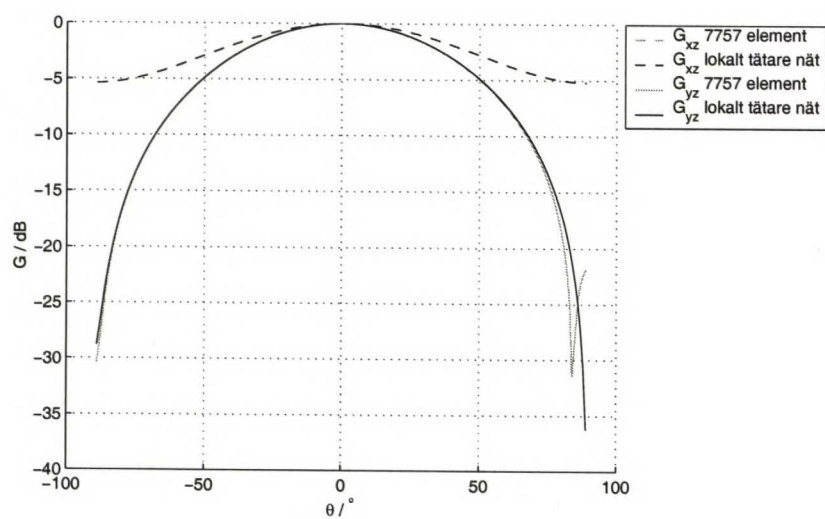
Figur 31: Diskretiseringen i xy -planet: lokalt tätare nät med 1652 trianglar (jämför med figur 26)

14.3 Lokalt tätare nät

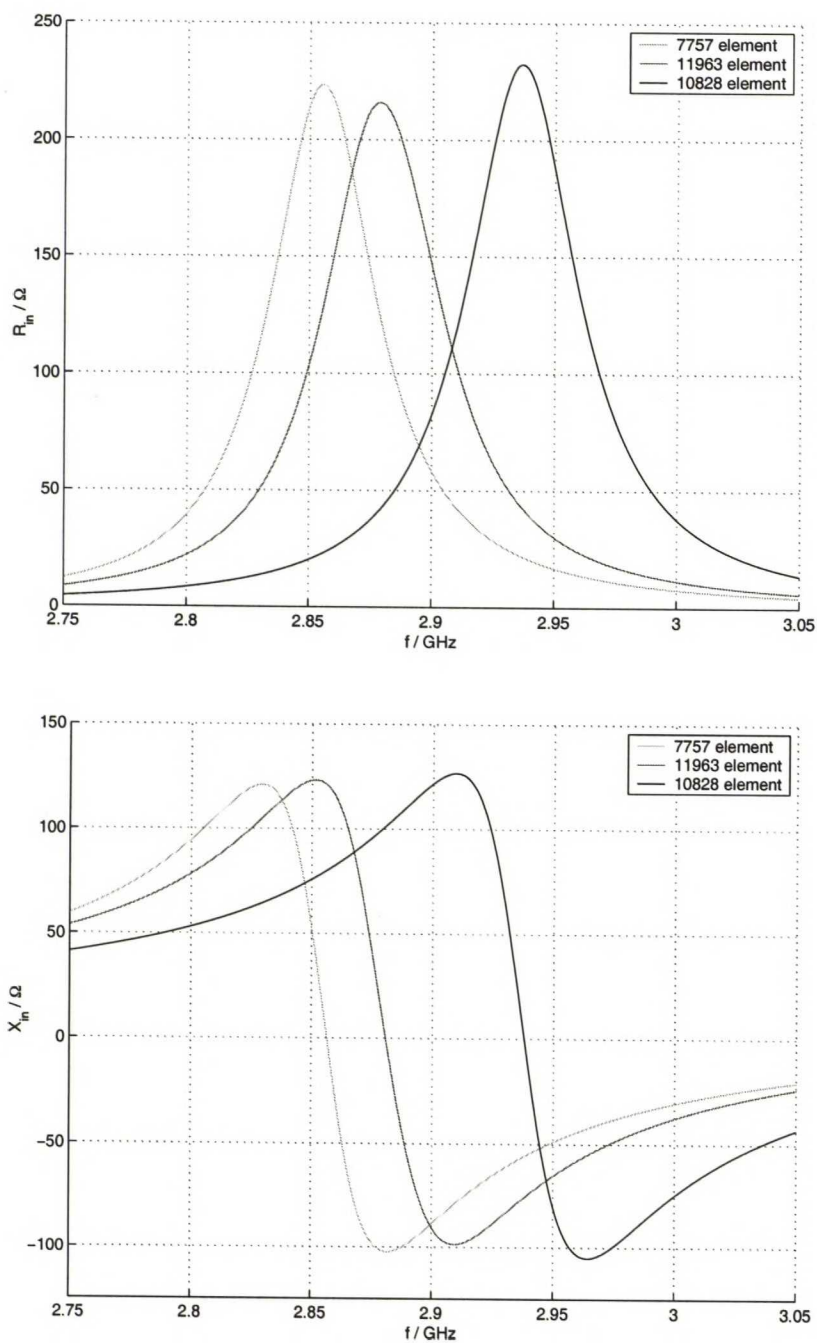
Diskretiseringen ovan (sektion 14.1) lider av två problem: dels blir antalet element snabbt för stort, så att simuleringstiderna blir orimligt långa, och dels är diskretiseringen uppenbarligen inte tillräckligt fin för att resonansfrekvensen skall stabilisera sig.

För att råda bot på problemet behövs förmodligen en bra adaptiv nätgenerering. Någon sådan har jag inte implementerat, men för att demonstrera de potentiella fördelarna har jag här gjort en *ad hoc*-nätförbättring, som baserar sig på att elfältet har en singularitet vid patchens metallkanter, och att det förmodligen är där nätet skall vara tätast. Det använda nätet finns i figur 31, och med $1 + 3 + 3$ lager blir det totalt 10828 element och 18109 okända.

Det resulterande strålningsdiagrammet och antennimpedansen finns i figur 32 respektive figur 33. Skillnaden i resonansfrekvens är markant, medan strålningsdiagrammet inte ändrar väsentligt.



Figur 32: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den kvadratiska mikrostripantennen. Jämn diskretisering (7757 element) versus lokalt mycket finare nät.



Figur 33: Antennimpedansen för den kvadratiska mikrostripantennen. De två första kurvorna (7757 respektive 11963 element) resulterar från samma jämna diskretisering som i figur 28, medan den tredje (10828 element) resulterar från ett lokalt mycket tätare nät.

14.4 Fält och ytströmmar

Med den valda formuleringen fås elfältet \mathbf{E} nära antennen som det primära resultatet. Detta fält är förstås i sig i viss mån intressant, och förutom antennimpedansen och strålningsdiagrammen som presenterats ovan kan man också beräkna diverse ytströmmar då väl elfältet är känt.

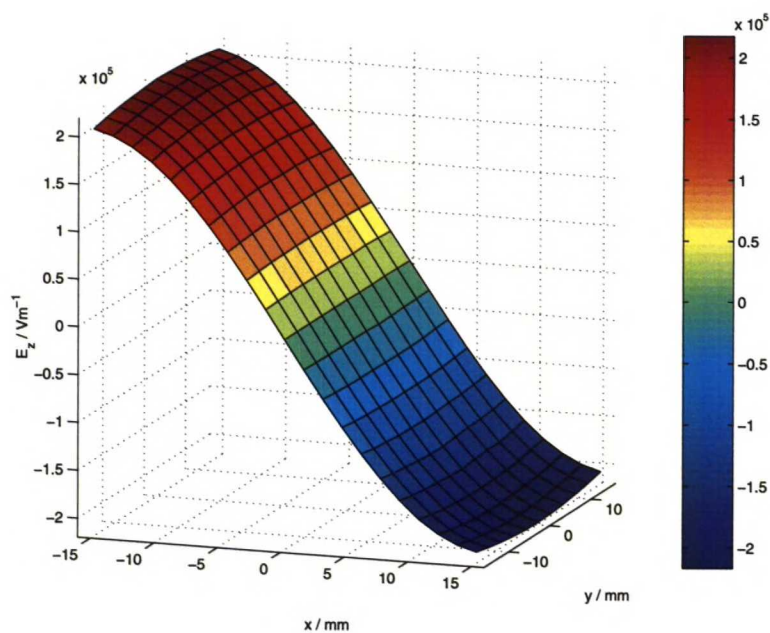
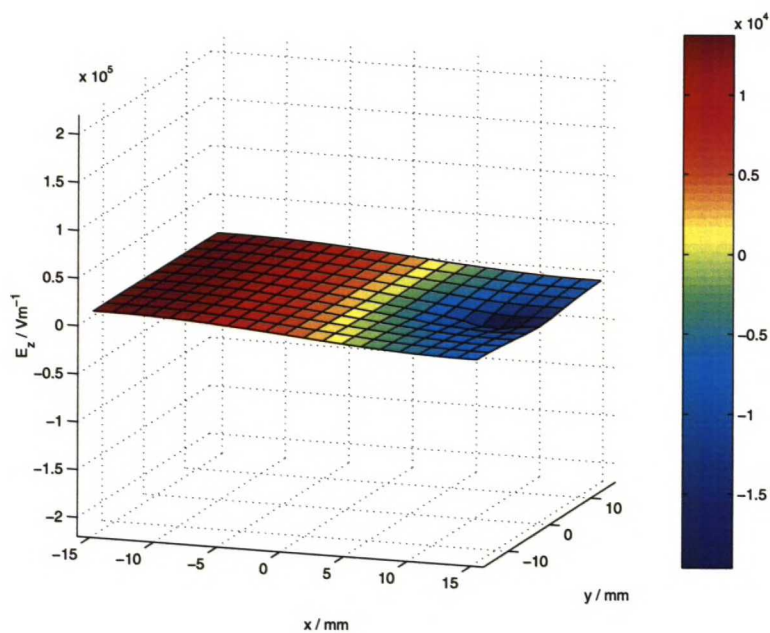
Endast resultaten för det lokalt tätare nätet med 10828 element presenteras här. Frekvensen i fråga är resonansfrekvensen 2,935 GHz. I figur 34 finns elfältet E_z under antennen avbildat. Det ser ut att stämma väl överens med det fält som en enkel resonatormodell förutsäger.

Den ekvivalenta magnetiska ytströmmen \mathbf{J}_{ms} på substratets yta kan enkelt beräknas med formel (82) som en funktion av det tangentiella elfältet. Resultatet finns i figur 35, och ser ut att överensstämma ganska bra med den ytström som fås med resonatormodellen [46].

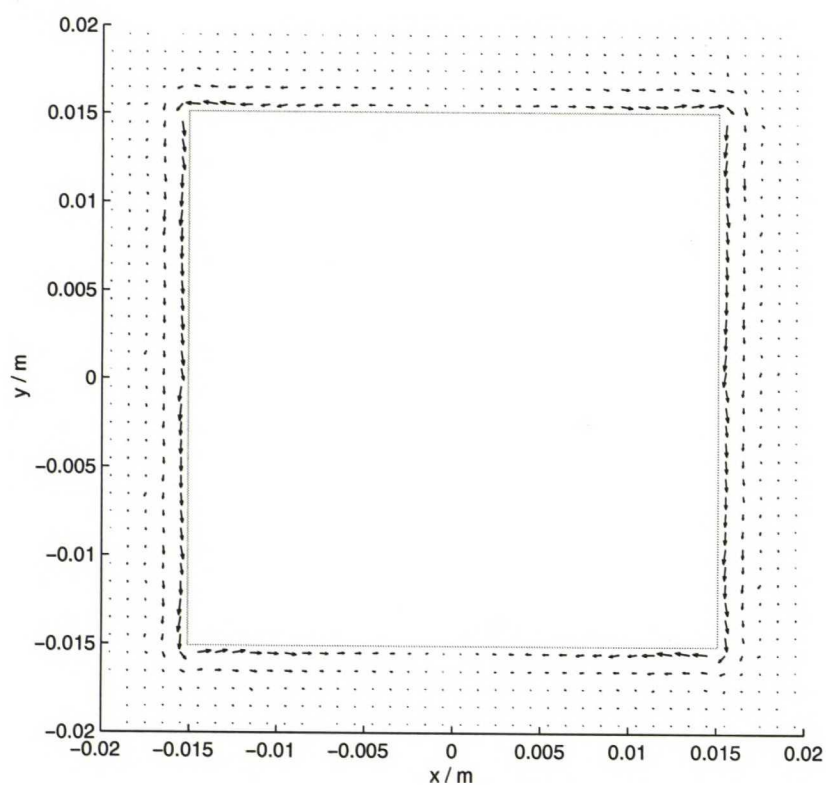
Den elektriska ytströmmen beräknas med formel (81) som en funktion av det tangentiella magnetfältet, som först måste beräknas som en funktion av elfältet. I och med att de intressanta ytorna är idealledare i xy -planet kan ifrågavarande elfält skrivas som $\mathbf{E} = \mathbf{u}_z E_z$ och med hjälp av Faradays lag (14) får vi

$$\mathbf{J}_s = \frac{j}{\omega\mu} \nabla_{xy} E_z. \quad (105)$$

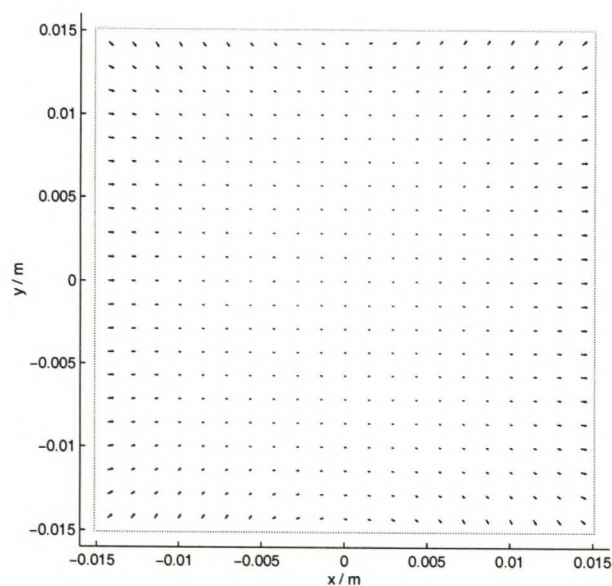
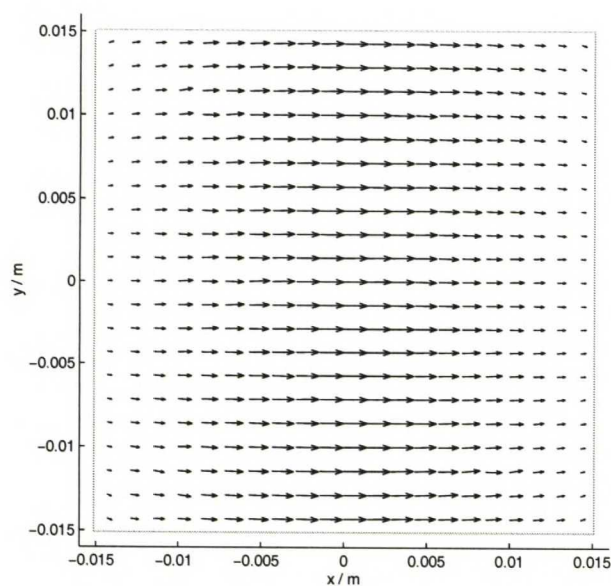
Ytströmmen \mathbf{J}_s är konstant inom varje element i och med att E_z varierar linjärt. De elektriska ytströmmarna ovanpå och under antennen finns i figur 36.

(a) $\Re\{E_z\}$ (b) $\Im\{E_z\}$

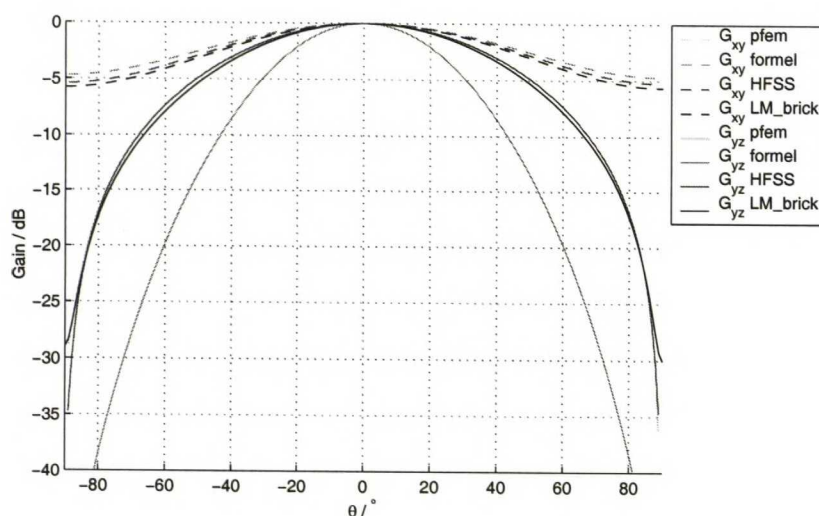
Figur 34: Elfältet under den kvadratiske mikrostripantennen



Figur 35: Den ekvivalenta magnetiska ytströmmen \mathbf{J}_{ms} för den kvadratiske mikrostripantennen. (Endast realdelen; imaginärdelen är mycket mindre och skulle inte alls synas med samma skala.)

(a) \mathbf{J}_s ovanpå(b) \mathbf{J}_s under

Figur 36: Ytströmmen \mathbf{J}_s ovanpå respektive under den kvadratiske mikrostripanntennen. (Endast imaginärdelen; realdelen är mycket mindre och skulle inte alls synas med samma skala.)



Figur 37: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den kvadratiske mikrostriptanten. Jämförelse av resultaten.

14.5 Jämförelse av resultaten

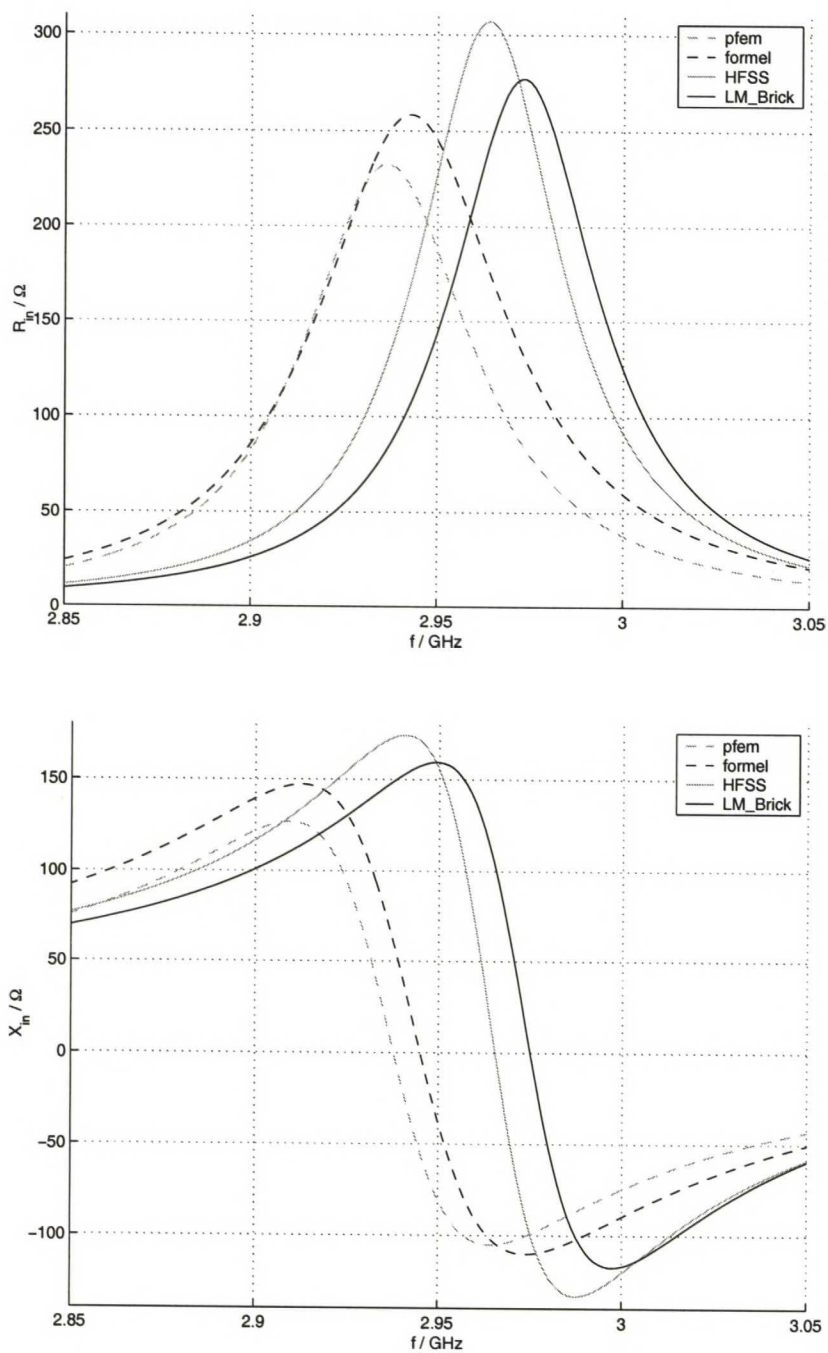
Slutligen kan vi jämföra de olika strålningsdiagram och antennimpedanser som ovan presenterats.

I boken [48] uppges denna antenn resonera på 3,00 GHz ($Z_{in} \approx 250 \Omega$), medan alla simuleringsresultat jag fått är under denna frekvens, dock så att en allt finare diskretisering ger högre resonansfrekvenser. De bästa resultaten⁷ med respektive metod finns samlade i figur 37 och 38.

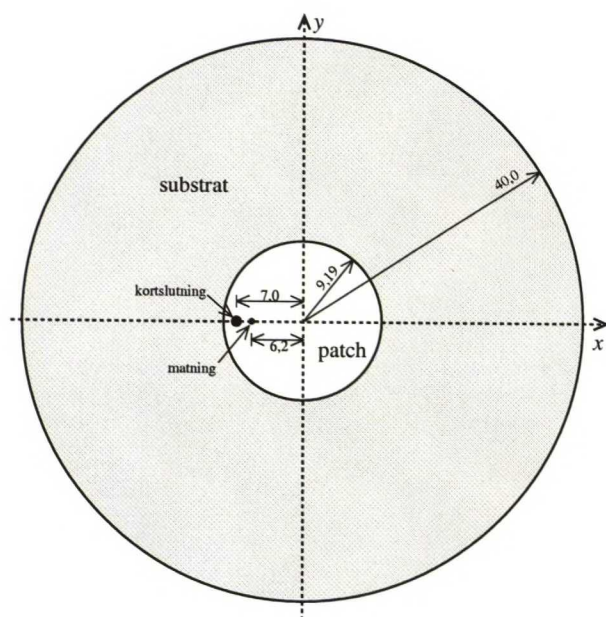
I frågan om strålningsdiagrammet (figur 37) kan man konstatera att alla simuleringsresultat stämmer mycket väl överens, förutom då $\theta \rightarrow \pm 90^\circ$. Formeln (98) ger däremot ett klart annorlunda strålningsdiagram i yz -planet. Eftersom det endast är denna formel som klart avviker är den oundvikliga slutsatsen att den approximativa formeln i fråga tydligen inte är speciellt bra i det här fallet.

Antennimpedansen i figur 38 varierar däremot betydligt mer. Med formel (94) fås resonansfrekvensen 2,943 GHz. Variationen i resonansfrekvens i figur 38 är ungefär 1 % och jämfört med den enligt boken [48] uppmätta frekvensen 3,00 GHz rymmer variationerna inom 2,2 %.

⁷PFEM: lokalt tätare nät med 10828 element, formlerna (98) och (99) för strålningsdiagrammet samt formeln (101) för antennimpedansen (med $Q_0 = 48$, enligt boken [48, figur 3.3]), HFSS: 32423 element och LM_BRICK: $96 \times 96 \times 2$ element



Figur 38: Antennimpedansen för den kvadratiske mikrostripantennen. Jämförelse av resultaten.



Figur 39: Den runda mikrostripantennens geometri. Substratet är 1,524 mm tjockt med $\epsilon_r = 4,81$ och $\tan \delta = 0,015$. Alla mått i figuren är i mm.

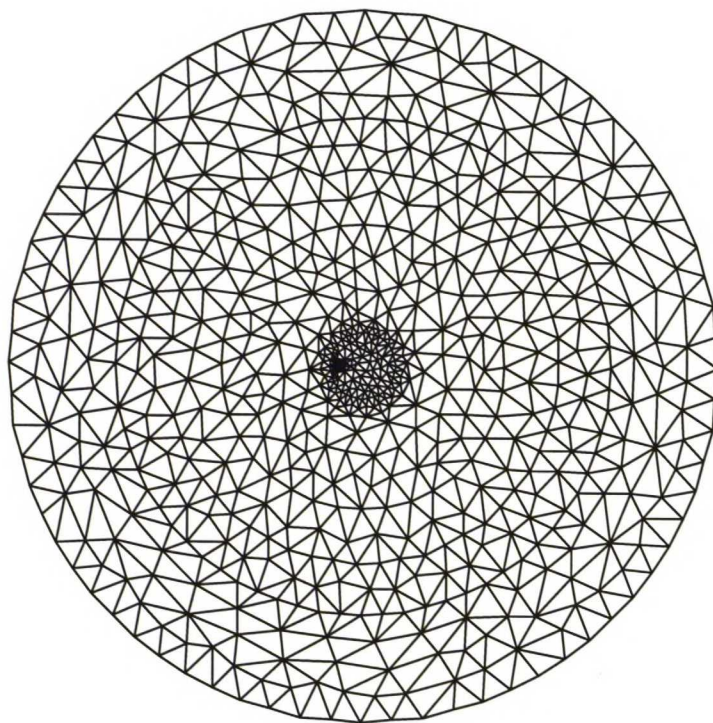
15 Resultat för den runda mikrostripantennen

Den andra antennen är en elektriskt liten rund mikrostripantenn, vars geometri finns i figur 39. Antennens radie är 9,19 mm, och den har en kortslutning med radien 0,3 mm placerad 7,0 mm från antennens mittpunkt. Matningen är 6,2 mm från mittpunkten – alltså mycket nära kortslutningen.

Substratet har radien 40 mm, tjockleken 1,524 mm, $\epsilon_r = 4,81$ och $\tan \delta = 0,015$. Substratet är igen nedsänkt i ett oändligt ledande plan, men i och med att substratet är stort jämfört med antennen antar jag att resultaten bör vara jämförbara med modeller som baserar sig på ett oändligt substrat, förutom eventuellt för strålningen då $\theta \rightarrow \pm 90^\circ$.

Det absorberande materialet är det samma som för den kvadratiska antennen ($\epsilon_r = \mu_r = 1 - j2,7$), men den här gången är det cylindriskt, 30 mm tjockt och placerat på 30 mm:s avstånd, vilket ungefär motsvarar $0,15 \lambda$.

Den runda kortslutningen har jag approximerat med en 6-hörning, medan alla större cirklar är approximerade med 36-hörningar. Antennmatningen antas fortfarande vara oändligt tunn.



Figur 40: Diskretiseringen i xy -planet (1344 trianglar)

15.1 Olika nät

I det här fallet är antennens dimensioner mycket små: patchens diameter är knappt $\lambda/10$. Någon jämn diskretisering kan därmed inte komma på fråga, utan nätet måste vara mycket tätare vid patchen än t.ex. i det absorberande materialet för att få patchen vettigt diskretiserad utan att det totala antalet element blir orimligt stort.

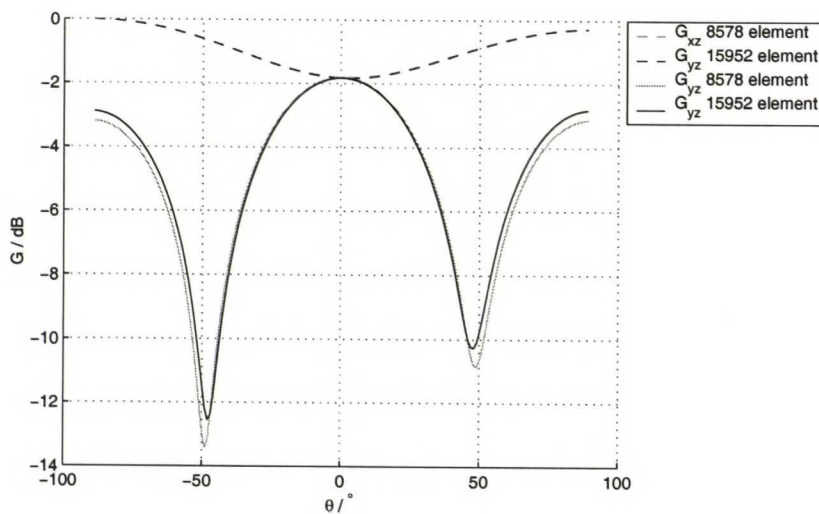
De två olika diskretiseringarna som använts och respektive simuleringstider finns sammanfattade i tabell 4. Det glesare nätet finns också i figur 40, medan det finare nätet är ett försök att göra nätet ungefär jämnt tätare.

Resultaten presenteras i figur 41 och 42. Skillnaderna är förbluffande små jämfört med resultaten för den kvadratiska antennen.

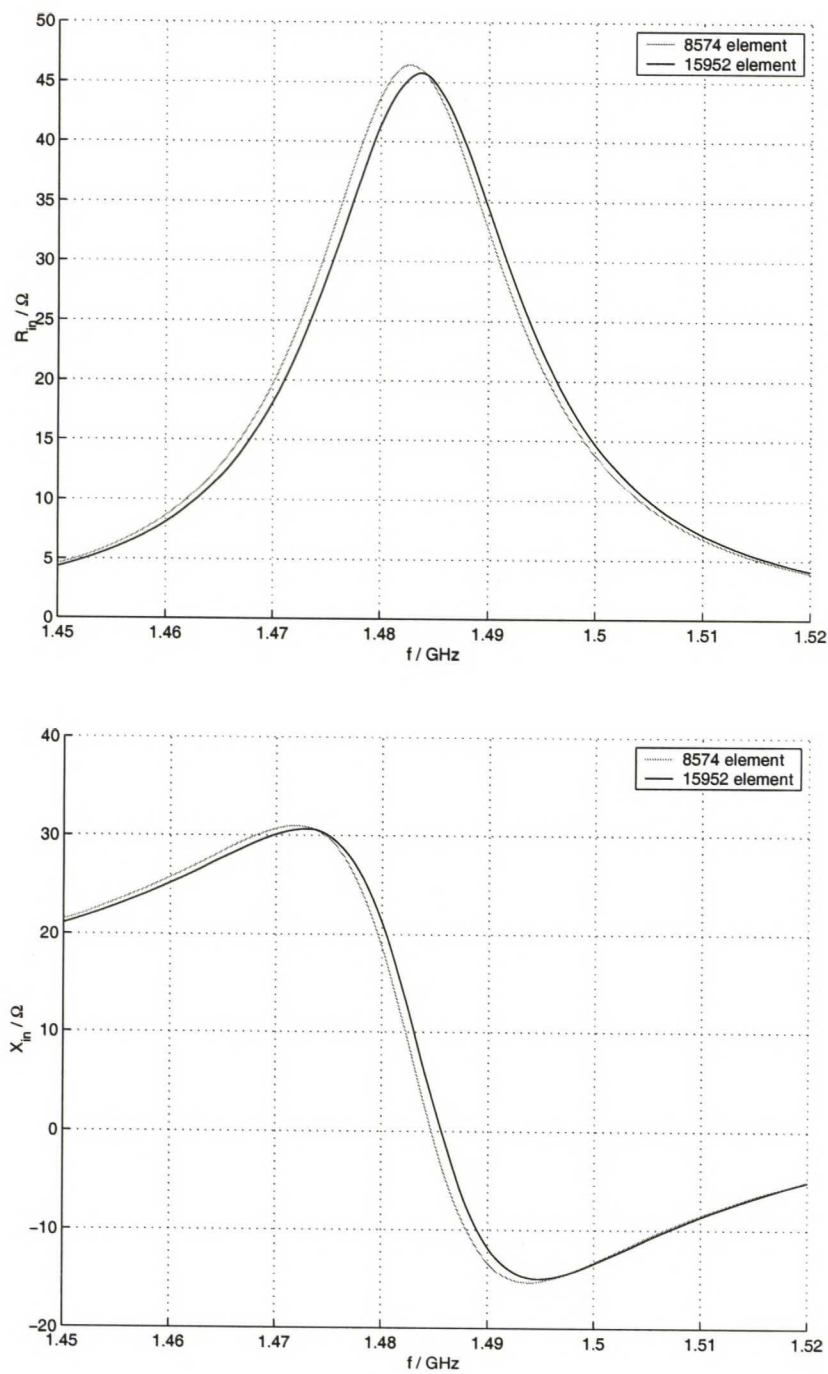
Strålningsdiagrammet i figur 41 ser tyvärr inte alls ut som väntat, medan antennimpedansen i figur 42 verkar rimlig förutom att resonansfrekvensen igen är något låg.

	trianglar	lager	element	okända	tid
1	1344	1 + 3 + 3	8578	15210	96,1 s
2	2124	1 + 4 + 3	15952	28699	173,1 s

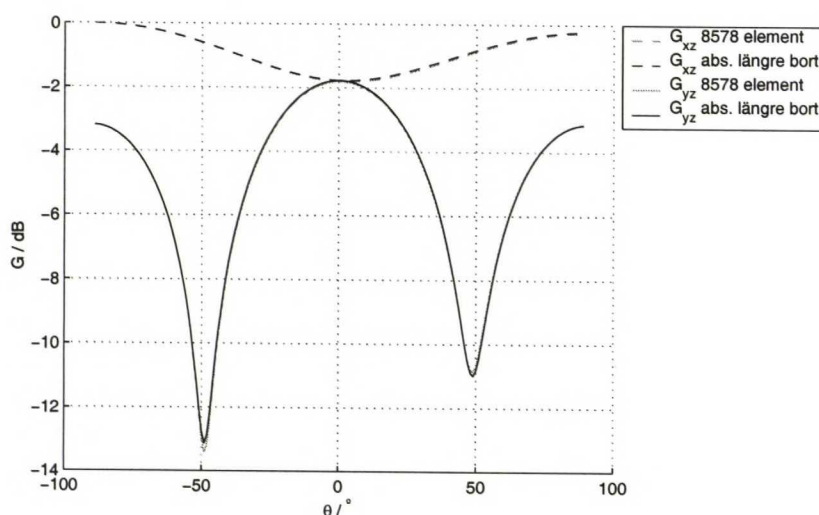
Tabell 4: De olika näten och resulterande simuleringstider. Kolumnen *lager* är antalet element i z -led i substratet, ovanför antennen respektive i det absorberande materialet. Tiderna är per frekvens i medeltal.



Figur 41: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den runda mikrostripantennen. Olika tät diskretisering.



Figur 42: Antennimpedansen för den runda mikrostripantennen. Olika tät diskretisering.

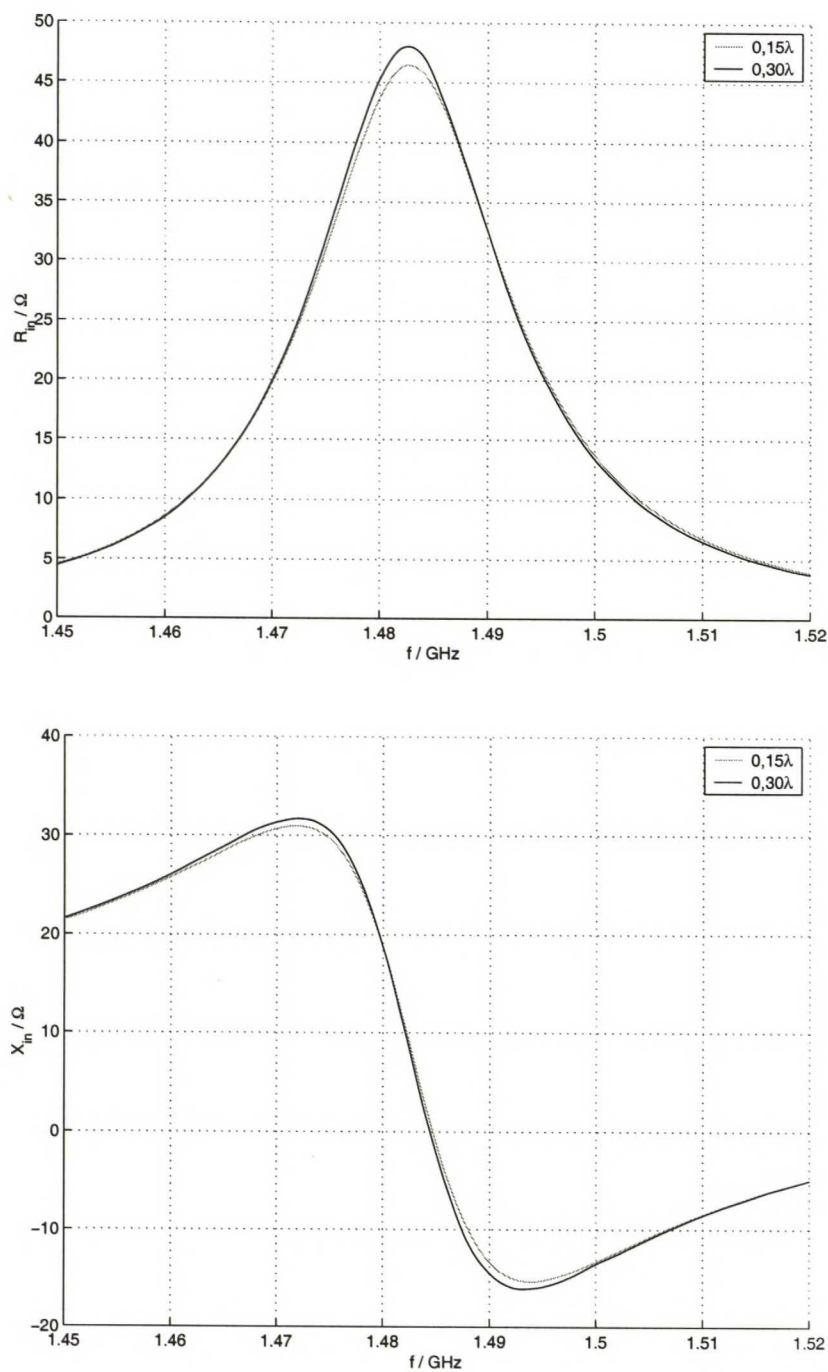


Figur 43: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den runda mikrostripantennen. Det absorberande materialet är placerat på avståndet 30 mm respektive 60 mm ($0,15 \lambda$ respektive $0,30 \lambda$ vid 1,5 GHz).

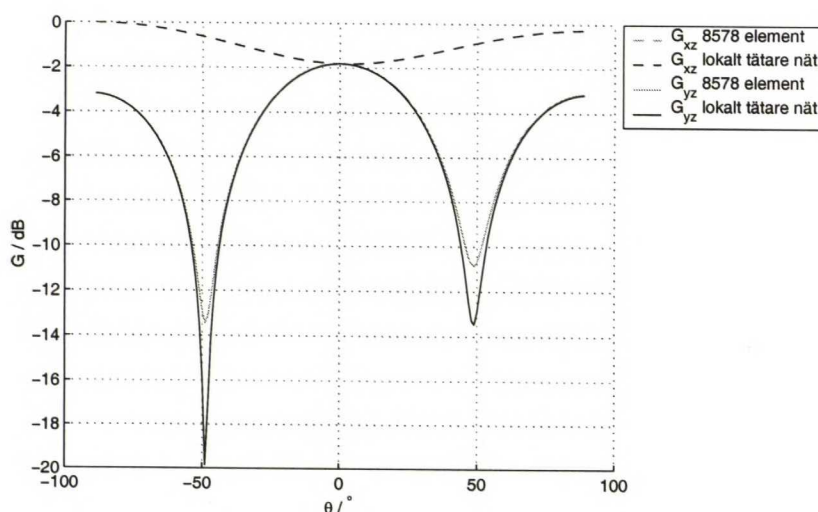
15.2 Det absorberande materialets inverkan

Eftersom strålningsdiagrammet för den runda antennen verkar bli totalt fel kunde man misstänka att det absorberande materialskiktet inte är tillräckligt reflektionsfritt. Nästa försök är att flytta det absorberande materialet dubbelt längre bort (60 mm, eller ungefär $0,30 \lambda$). Geometrin är i övrigt exakt den samma, och diskretiseringen är ungefär lika tät som för det glesare nätet ovan (tabell 4, nät nummer 1).

Resultaten finns i figurerna 43 och 44. Som synes är förändringen försumbar, vilket tyder på att det absorberande materialskiktet fungerar tillräckligt bra.



Figur 44: Antennimpedansen för den runda mikrostripantennen. Det absorberande materialet är placerat på avståndet 30 mm respektive 60 mm (0,15 λ respektive 0,30 λ vid 1,5 GHz).



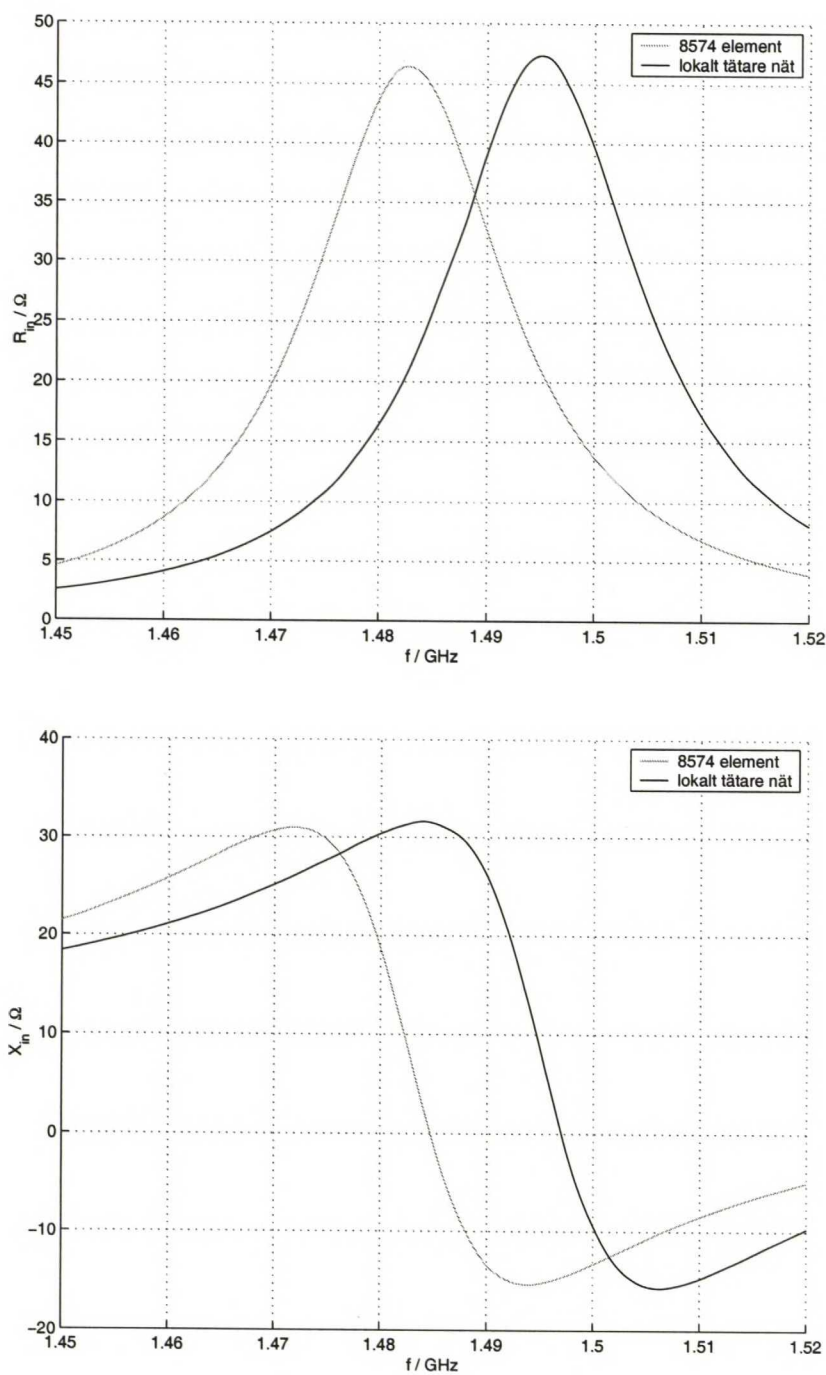
Figur 45: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den runda mikrostripantennen. Den ursprungliga diskretiseringen (8574 element) versus en lokalt tätare diskretisering.

15.3 Lokalt tätare nät

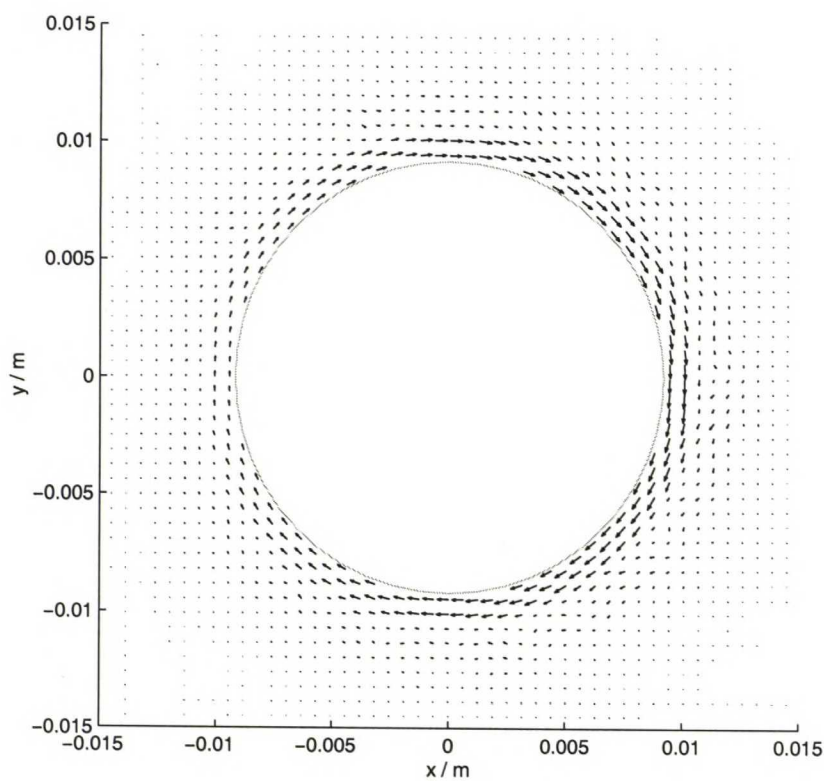
Diskretiseringen ovan (sektion 15.1) är redan mycket ojämn, men jag har i varje fall gjort en motsvarande *ad hoc*-nätförbättring som för den kvadratiska antennen. I det här fallet är det i synnerhet nätet just utanför patchens kanter som har gjorts tätare, dels genom att använda 48-hörningar istället för 36-hörningar som cirkel-approximationer, och dels genom att lägga till en mängd punkter just bredvid antennen. Det resulterande nätet har 10654 element.

I det här fallet ändrade resonansfrekvensen betydligt, vilket framgår av figur 46. Strålningsdiagrammet i figur 45 ändrade också en del, men huvud dragen är de samma.

På basen av resultaten för den kvadratiska antennen kunde man vänta sig att denna *ad hoc*-nätförbättring skulle ge bättre resultat än den jämnare nätförbättringen ovan (sektion 15.1). Att resultaten är så här markant annorlunda var däremot oväntat. En noggrannare studie av den jämnare nätförbättringen visar emellertid att den inte egentligen är så jämn som jag först antog: de båda näten ovan (nät 1 och nät 2 i tabell 4) är ganska lika just vid patchens kanter. Det här beror främst på att 36-hörningen som i vardera fallet använts för att beskriva den runda patchen nästan helt bestämmer nätets täthet just vid patchens kant.



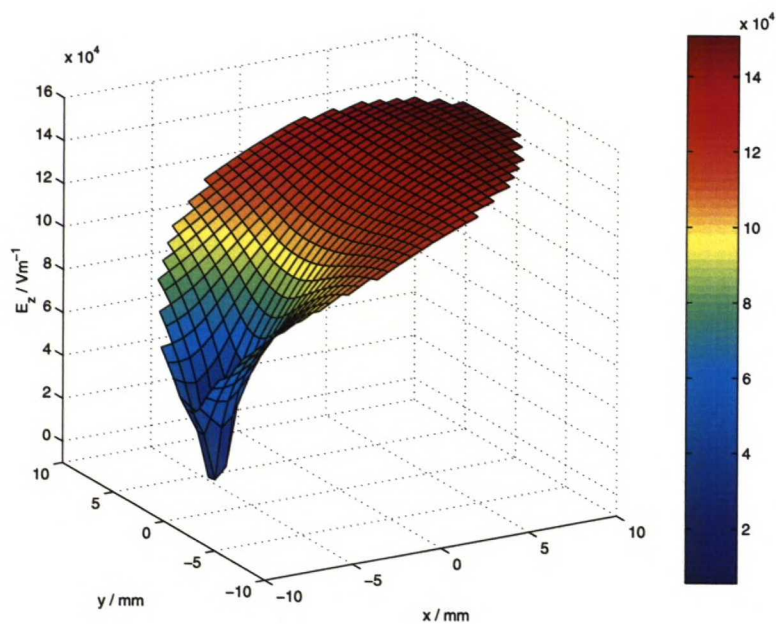
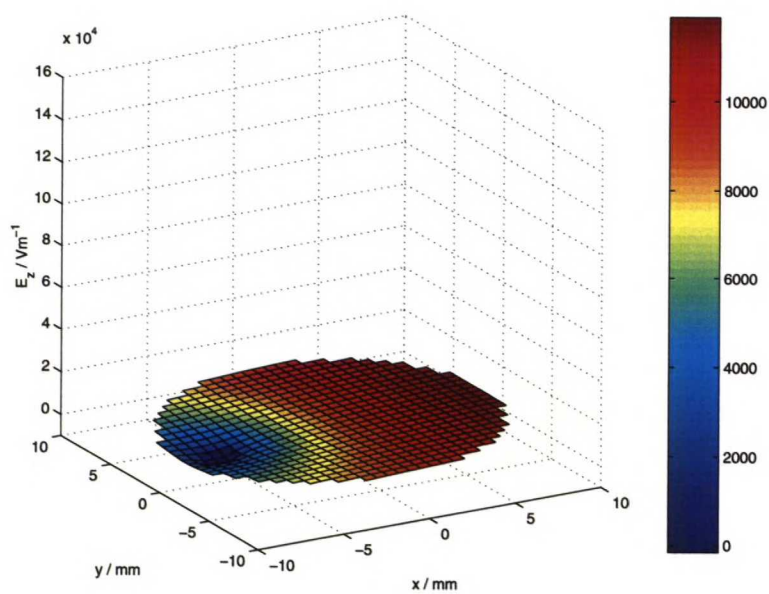
Figur 46: Antennimpedansen för den runda mikrostripantennen. Den första kurvan (8574 element) är samma som i figur 42, medan den andra resulterar från ett lokalt tätare nät.



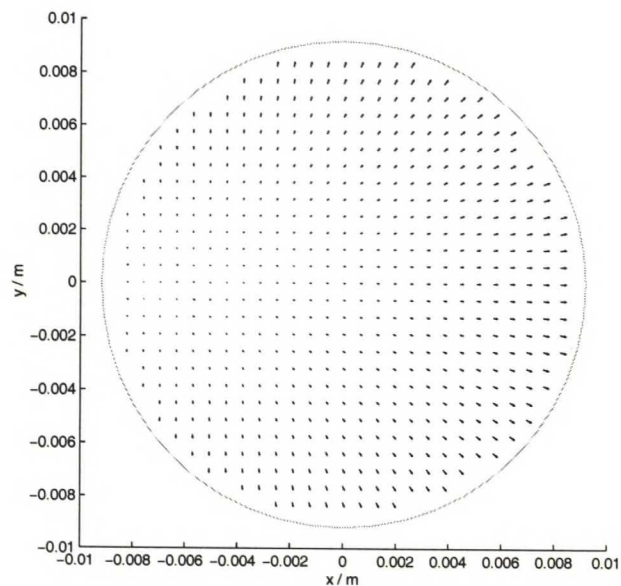
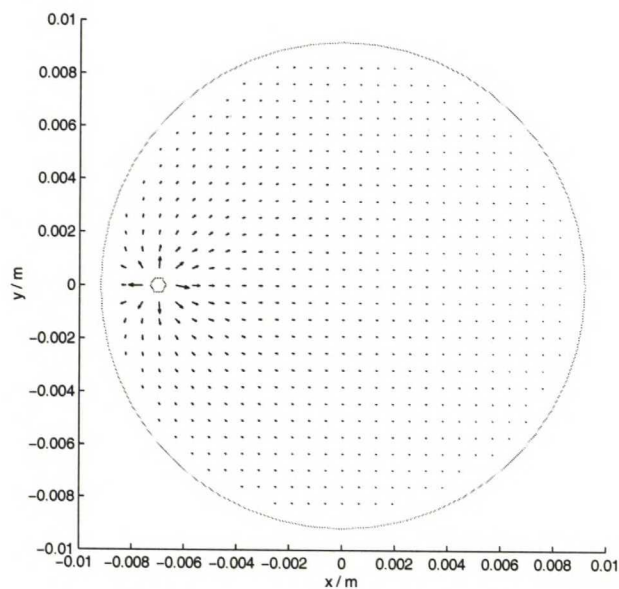
Figur 47: Den ekvivalenta magnetiska ytströmmen \mathbf{J}_{ms} för den runda mikrostripantennen. (Endast realdelen; imaginärdelen är mycket mindre och skulle inte alls synas med samma skala.)

15.4 Fält och ytströmmar

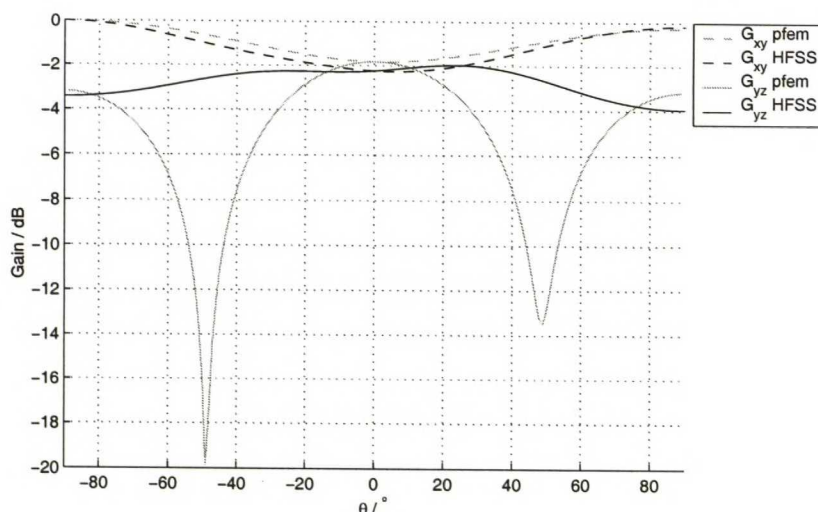
Den ekvivalenta magnetiska ytströmmen \mathbf{J}_{ms} på substratets yta (figur 47) och elfältet \mathbf{E}_z under antennen (figur 48) ser ungefär ut som man kunde vänta sig. Den elektriska ytströmmen \mathbf{J}_s i figur 49 är till sitt absolutbelopp störst vid kortslutningen. Man kan alltså anta att en antenn av det här slaget har märkbara resistiva förluster just i samband med kortslutningen.

(a) $-\Re\{E_z\}$ (b) $\Im\{E_z\}$

Figur 48: Elfältet under den runda mikrostripantennen

(a) $20\mathbf{J}_s$ ovanpå(b) \mathbf{J}_s under

Figur 49: Ytströmmen \mathbf{J}_s ovanpå respektive under den runda mikrostripantennen. (Endast imaginärdelen; realdelen är mycket mindre och skulle inte alls synas med samma skala.)



Figur 50: Normaliserade strålningsdiagram i xz - och yz -planen för den runda mikrostripantennen. Jämförelse av resultaten.

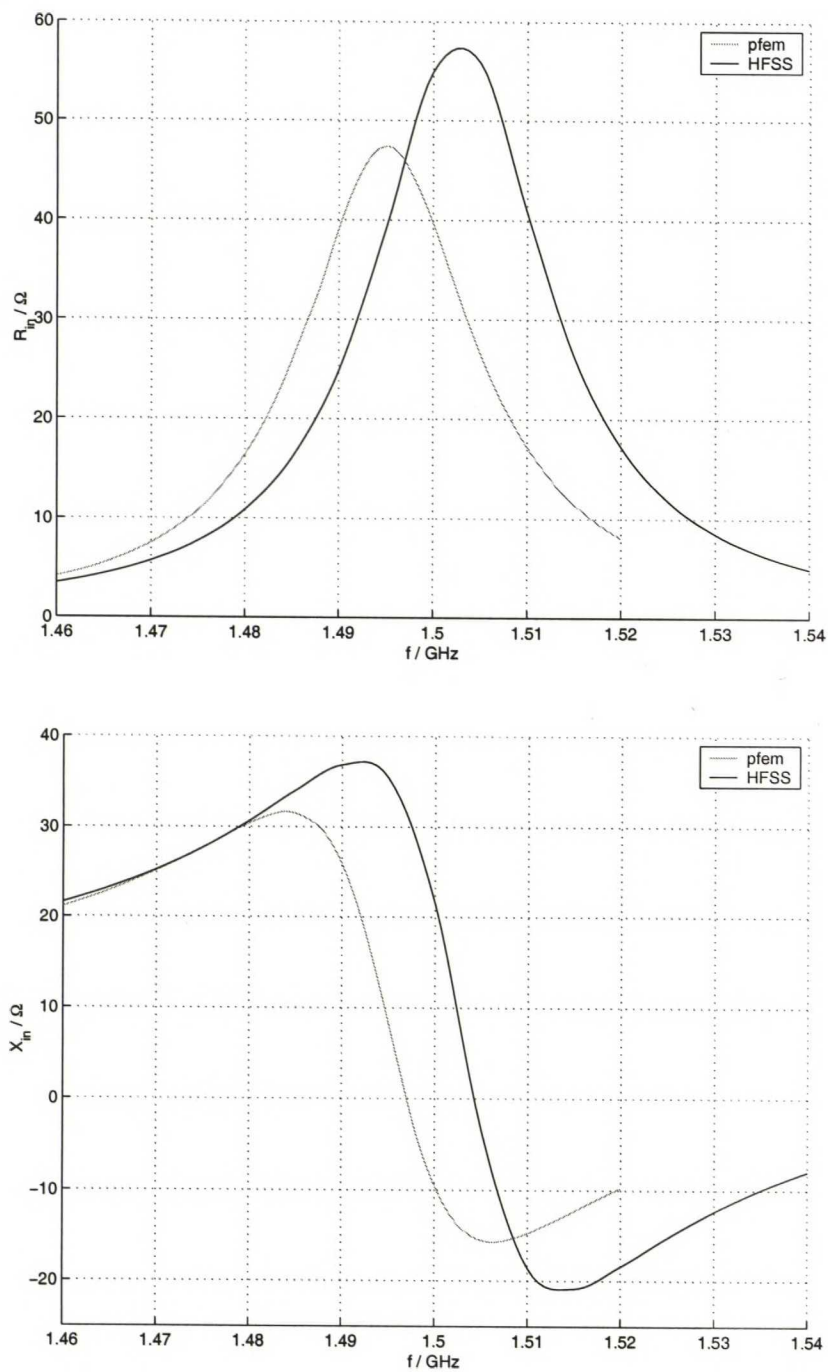
15.5 Jämförelse av resultaten

Enligt artikeln [49] är resonansfrekvensen för denna antenn 1,54 GHz och antennimpedansen vid denna frekvens är nära 50Ω . (Missanpassningsdämpningen är mindre än -20 dB.) Samma artikel innehåller också normaliserade strålningsdiagram. Dessa resultat baserar sig på såväl beräkningar som experiment.

Strålningsdiagrammen jag fått⁸ finns i figur 50. Man kan lugnt säga att de inte alls överensstämmer med varandra, och det strålningsdiagram som finns i artikeln [49] är helt annorlunda – det liknar närmast de strålningsdiagram jag fått för den kvadratiska antennen.

Antennimpedanserna i figur 51 är däremot rimligare, även om resonansfrekvenserna är 2,9 % respektive 2,3 % för låga jämfört med referensvärdet 1,54 GHz.

⁸PFEM: lokalt tätare nät med 10654 element, HFSS: 28124 element



Figur 51: Antennimpedansen för den runda mikrostripantennen. Jämförelse av resultaten.

16 Slutsatser

På basen av de resultat jag fått, och de resultat som presenterats i olika referenser, kan man nog dra slutsatsen att finita elementmetoden är användbar för analys av planara antenner. Resultaten är dock något sämre än vad jag väntat mig på basen av de böcker och artiklar jag läst. Dels tenderar simuleringstiderna att bli långa, och dels är precisionen inte så bra.

I praktiken går nästan all processortid åt till lösningen av de linjära ekvationssystemen, så genom att optimera denna lösning eller använda en bättre lösningsalgoritm kunde simuleringstiderna troligen minskas. Någon dramatisk förbättring är däremot inte nödvändigtvis möjlig i det här avseendet.

Antennimpedansen tycks i regel bli ungefär rätt, men resonansfrekvensen är i samtliga fall för låg. Felmarginaler på några procent kan i många fall vara acceptabla, men eftersom felet i det här fallet är av samma storleksordning som antennens bandbredd kan man ifrågasätta resultatens praktiska värde.

Strålningsdiagrammen är mer problematiska: för den kvadratiska antennen är precisionen bra, men för den runda antennen verkar resultaten helt orimliga. Varken det använda nätets täthet eller det absorberande materialskiktets placering inverkar speciellt mycket på dessa strålningsdiagram. Ytterligare studier skulle alltså behövs för att utreda orsaken till dessa konstiga resultat.

Diskretiseringen har visat sig vara en viktig faktor. I synnerhet nätets täthet vid antennens kanter tycks avgöra hur exakt resonansfrekvensen kan bestämmas. En jämn diskretisering på ungefär $\lambda/20$ verkar i övrigt tillräcklig, men just vid antennens skarpa metallkanter behövs mycket finare nät.

Varken en jämn diskretisering eller de *ad hoc*-nätförbättringar jag använt är emellertid tillfredsställande. Troligen behövs det en bra adaptiv närförbättring i kombination med en vettig första diskretisering för att resultaten skall vara tillförlitliga.

En annan lösning på problemet kunde vara att välja bättre element. Element av högre grad borde ge bättre resultat, men en verkligt dramatisk förbättring fås antagligen bara ifall man lyckas konstruera basfunktioner som effektivt kan modellera elfältets singulariteter vid de skarpa metallkanter som förekommer.

Det använda absorberande materialskiktet verkar tillfredsställande då det placeras på minst $0,15 \lambda$ s avstånd. Visserligen ändrar resultaten något då materialet flyttas dubbelt längre bort, men förändringarna är små jämfört med de förändringar som beror på nätets täthet.

Referenser

- [1] J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley-Interscience, 1993.
- [2] J. L. Volakis, A. Chatterjee, and L. C. Kempel, *Finite Element Method for Electromagnetics*. IEEE Press, 1998.
- [3] P. P. Silverster and G. Pelosi, eds., *Finite Elements for Wave Electromagnetics: Methods and Techniques*. IEEE Press, 1994.
- [4] R. Dyczij-Edlinger and O. Biro, "A joint vector and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite elements," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 44, Jan. 1996.
- [5] J. L. Volakis, T. Özdemir, and J. Gong, "Hybrid finite-element methodologies for antennas and scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, Mar. 1997.
- [6] J.-M. Jin and J. L. Volakis, "A hybrid finite element method for scattering and radiation by microstrip patch antennas and arrays residing in a cavity," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 39, Jan. 1991. I samlingsverket [3].
- [7] A. F. Peterson, "Absorbing boundary conditions for the vector wave equation," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 1, pp. 62–64, Apr. 1998. I samlingsverket [3].
- [8] J. P. Webb and V. N. Kanelopoulos, "Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 2, pp. 370–372, Oct. 1989. I samlingsverket [3].
- [9] A. F. Peterson, "Accuracy of 3-D radiation boundary conditions for use with the vector Helmholtz equation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 40, Mar. 1992. I samlingsverket [3].
- [10] V. N. Kanelopoulos and J. P. Webb, "A numerical study of vector absorbing boundary conditions for the finite-element solution of Maxwell's equations," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 1, Nov. 1991. I samlingsverket [3].

- [11] A. Chatterjee, J. M. Jin, and J. L. Volakis, "Edge-based finite elements and vector ABC's applied to 3-D scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 41, Feb. 1993. I samlingsverket [3].
- [12] A. Chatterjee and J. L. Volakis, "Conformal absorbing boundary conditions for the vector wave equation," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 6, Dec. 1993.
- [13] A. Chatterjee and J. L. Volakis, "Conformal absorbing boundary conditions for 3-D problems: Derivation and applications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, Aug. 1995.
- [14] B. Stupfel and R. Mittra, "Numerical absorbing boundary conditions for the scalar and vector wave equations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, July 1996.
- [15] B. Stupfel, "Numerical implementation of second- and third-order conformal absorbing boundary conditions for the vector-wave equations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, Mar. 1997.
- [16] T. B. A. Senior, J. L. Volakis, and S. R. Legault, "Higher order impedance and absorbing boundary conditions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, Jan. 1997.
- [17] J.-M. Jin, J. L. Volakis, and V. V. Liepa, "An engineer's approach for terminating finite element meshes in scattering analyses," in *Antennas and Propagation Society International Symposium*, pp. 1216–1219, June 1991.
- [18] J. M. Jin, J. L. Volakis, and V. V. Liepa, "Fictitious absorber for truncating finite element meshes in scattering," *Microwaves, Antennas and Propagation, IEE Proceedings H*, vol. 139, Oct. 1992.
- [19] C. M. Rappaport and L. J. Bahrmassel, "An absorbing boundary condition based on anechoic absorber for EM scattering computation," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 6, no. 12, 1992.
- [20] T. Özdemir and J. L. Volakis, "A comparative study of an absorbing boundary condition and an artificial absorber for truncating finite element meshes," *Radio Science*, vol. 29, Sept.–Oct. 1994.
- [21] T. Özdemir and J. L. Volakis, "Triangular prisms for edge-based vector finite element analysis of conformal antennas," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, May 1997.

- [22] A. Sihvola and I. Lindell, *Sähkömagneettinen kenttäteoria, 2. Dynaamiset kentät*. 570, Otatieto, 1996.
- [23] Z. S. Sacks, D. M. Kingsland, R. Lee, and J.-F. Lee, "A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, Dec. 1995.
- [24] J. Gong and J. L. Volakis, "Optimal selection of uniaxial artificial absorber layer for truncating finite element meshes," *Electronics Letters*, vol. 31, Aug. 1995.
- [25] D. M. Kingsland, J. Gong, J. L. Volakis, and J.-F. Lee, "Performance of an anisotropic artificial absorber for truncating finite-element meshes," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, July 1996.
- [26] S. R. Legault, T. B. A. Senior, and J. L. Volakis, "Design of planar absorbing layers for domain truncation in FEM applications," *Electromagnetics*, vol. 16, pp. 451–464, 1996.
- [27] L. C. Kempel, "Low memory brick." <http://www.eecs.umich.edu/RADLAB/bookprograms.html>. Ett FEM-program som beskrivs i [2].
- [28] H. Whitney, *Geometric Integration Theory*. Princeton University Press, 1957.
- [29] A. Bossavit, "Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism," *Science, Measurement and Technology, IEE Proceedings A*, vol. 135, Nov. 1988.
- [30] J. C. Nedelec, "Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 ," *Numerische Mathematik*, vol. 35, pp. 315–341, 1980.
- [31] J. P. Webb, "Edge elements and what they can do for you," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, Mar. 1993. I samlingsverket [3].
- [32] K. D. Paulsen and D. R. Lynch, "Elimination of vector parasites in finite element Maxwell solutions," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, Mar. 1991.
- [33] R. D. Graglia, D. R. Wilton, and A. F. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases for computational electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, Mar. 1997.

- [34] R. D. Graglia, D. R. Wilton, and A. F. Peterson, "Higher order interpolatory vector bases on prism elements," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 46, Mar. 1998.
- [35] S. Owen, "Meshing software survey." <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/softsurv.html>, Sept. 1998.
- [36] I. Tsukerman, "A general accuracy criterion for finite element approximation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, Sept. 1998.
- [37] I. Tsukerman, "Comparison of accuracy criteria for approximation of conservative fields on tetrahedra," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, Sept. 1998.
- [38] I. Tsukerman, "Approximation of conservative fields and the element 'edge shape matrix'," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, Sept. 1998.
- [39] M. Berzins, "Mesh quality: A function of geometry, error estimates or both?," *Engineering With Computers*, vol. 15, no. 3, 1999.
- [40] J. R. Shewchuk, "Triangle, a two-dimensional quality mesh generator and Delaunay triangulator, version 1.3." <http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>, July 1996.
- [41] J. R. Shewchuk, "Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator," in *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering* (M. C. Lin and D. Manocha, eds.), Springer-Verlag, 1996. <http://www.cs.cmu.edu/~quake/tripaper/triangle0.html>.
- [42] J. Gong and J. L. Volakis, "An efficient and accurate model of the coax cable feeding structure for fem simulations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, Dec. 1995.
- [43] "Maple V Release 5.0 Version 5.00." Waterloo Maple Inc. Ett program för symbolisk- och numerisk matematik.
- [44] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, and H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, 1994. <http://www.netlib.org/templates/Templates.html>.
- [45] "Netlib." <http://www.netlib.org/>. A collection of mathematical software, papers, and databases.

- [46] I. Lindell and K. Nikoskinen, *Antenniteoria*. 848, Otatieto, 1995.
- [47] G. R. Cowper, "Gaussian quadrature formulas for triangles," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 7, pp. 405–408, 1973.
- [48] K. Hirasawa and M. Haneishi, eds., *Analysis, Design, and Measurement of Small and Low-Profile Antennas*. Artech House, 1992.
- [49] R. Waterhouse, "Small microstrip patch antenna," *Electronics Letters*, vol. 31, Apr. 1995.
- [50] J. R. James, P. S. Hall, and C. Wood, *Microstrip Antenna Theory and Design*. Peter Peregrinus, 1981.
- [51] W. F. Richards, Y. T. Lo, and D. D. Harrison, "An improved theory for microstrip antennas and applications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 29, Jan. 1981.
- [52] "Ansoft HFSS Version 7.0.04." Ansoft Corporation. High Frequency Structure Simulator, <http://www.ansoft.com>.